

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité « Mathématique et Automatique »

présentée et soutenue publiquement par

François Poulain

le 28 mars 2012

**Commande d'un véhicule hypersonique à
propulsion aérobie : modélisation et synthèse**

Directeur de thèse : **Laurent Praly**
Co-encadrement de la thèse : **Hélène Piet-Lahanier**

Jury

M. Félix MORA-CAMINO, Professeur des universités, ENAC,
M. Christophe PRIEUR, Directeur de Recherche CNRS, Gipsa-lab,
M. Jean-Philippe HARCAUT, Ingénieur SupAéro, Docteur ENSAE, MBDA France,
M. Laurent SERRE, Ingénieur INPG, Onera DCPS,
Mme Hélène PIET-LAHANIER, Conseiller Scientifique Onera, Onera DCPS,
M. Laurent PRALY, Directeur de Recherche, CAS, Mines-ParisTech,

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

La connaissance tue l'action,
parce que l'action exige qu'on se voile dans l'illusion.

Friedrich Nietzsche, *La naissance de la tragédie*.

François Poulain, 2012, *Commande d'un véhicule hypersonique à propulsion aérobie : modélisation et synthèse*. Thèse de doctorat. Onera / Mines ParisTech.

Vous êtes encouragés à copier ou diffuser ce document, dans son intégralité ou en partie, sur n'importe quel support, à condition que : i) le contenu soit préservé mot pour mot ; ii) cette notice soit préservée.

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont soutenu le long de ce travail, globalement enthousiasmant, mais également ponctionné de moments difficiles. Collègues, amis, famille, proches, soyez assuré de ma plus sincère et profonde gratitude.

Je tiens également à saluer l'ensemble des mes anciens collègues de l'Onera, que j'ai eu plaisir à côtoyer pendant ces années. L'effervescence intellectuelle qui y régnait était un plaisir permanent. J'en profite pour remercier en particulier Cédric Monjaret et Laurent Serre pour leurs conseils avisés. Par ailleurs, je remercie l'ensemble du CAS pour son accueil, son soutien, ses séminaires —d'une qualité rare— ainsi que de son ambiance, dont je n'ai certainement pas assez profité. Je tiens notamment à exprimer ma gratitude à Nicolas Petit, sans qui je n'aurais pas mené ce travail à bout.

Je remercie par ailleurs Jean Lévine pour son soutien et son influence, depuis plusieurs années, dont la rencontre et les travaux ont été déterminants pour l'intérêt que j'ai porté à l'automatique. Ce, depuis les dernières années de ma vie étudiante Brestoïse, où j'ai découvert la discipline au travers des cours de Emmanuel Delaleau. Je profite également de l'occasion pour remercier ce dernier, dont les encouragements m'ont permis de poursuivre mes études et de sortir de ma zone de confort, changeant radicalement ma vie et m'ouvrant à des horizons que je ne soupçonnais pas.

Enfin, je remercie tout particulièrement mes encadrant, Hélène Piet-Lahanier ainsi que Laurent Praly, pour la richesse des interactions que nous avons pu entretenir au long de ces dernières années. Merci de m'avoir permis de mener ces travaux au sein de l'Onera, de m'avoir conseillé, de m'avoir accompagné, d'avoir su tempérer parfois des excès d'enthousiasme, d'avoir consolidé de nombreux défauts de rigueur et de m'avoir soutenu dans les difficultés. Ça a été un réel plaisir de travailler à vos cotés, dans une ambiance toujours joviale, et les moments passés ensemble ont toujours été pour moi des occasions de découvrir des concepts et des techniques d'une grande richesse. Encore merci pour tout.

François

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Sur le vol hypersonique aérobie	1
1.1.1	Intérêt du vol hypersonique aérobie	1
1.1.2	Un défi technologique	3
1.2	Bibliographie	4
1.2.1	Autour des programmes NASP et Hyper-X de l' <i>US Air Force</i> (USAF)	4
1.2.2	Autour de l'université de Californie	5
1.2.3	Développements au sein de l'Office National d'Étude et de Recherche Aérospatiale	5
1.3	Motivation de l'étude	6
1.4	Démarche poursuivie	6
I	Modélisation	9
2	Modélisation d'un HSV	11
2.1	Introduction	11
2.2	Périmètre de la modélisation	12
2.2.1	Rôle de la modélisation	12
2.2.2	Contexte de l'étude	12
2.2.3	Méthodologie de définition des modèles	12
2.3	Présentation du modèle de simulation	13
2.4	Modélisation aérodynamique	14
2.4.1	Spécificité des véhicules hypersoniques (HSV)	15
2.4.2	Dynamique des interactions	15
2.4.3	Analyse de simulation	16
2.4.4	Modélisation des forces aérodynamiques	18
2.4.5	Modélisation du moment aérodynamique	19
2.5	Modélisation de la propulsion	19
2.5.1	Dynamique des interactions	21
2.5.2	Modélisation de l'entrée d'air	21
2.5.3	Modélisation des effets de combustion	23
2.5.4	Remarques complémentaires à propos de la propulsion	25
2.6	Modélisation de la propulsion : approche simplifiée	25
2.6.1	Valeur de la poussée	25
2.6.2	Direction de la poussée	27
2.7	Modélisation de l'environnement	27
2.7.1	Formalisme de terre plate	27
2.7.2	Perturbations aérologiques	28
2.7.3	Vitesse du son	29
2.7.4	Densité de l'atmosphère	29
2.7.5	Modélisation de l'environnement pour la simulation	30
2.7.6	Modélisation de l'environnement pour la commande	30
2.8	Modélisation des masses	30

2.8.1	Remarques préalables	30
2.8.2	Modèle de simulation pour la variation des masses	31
2.8.3	Modèle de comportement pour la variation des masses	31
2.9	Application de la mécanique Newtonienne	31
2.9.1	Orientation et dynamique d'un solide volant, en repère Galiléen	31
2.9.2	Restriction à un vol dans le plan vertical de symétrie	33
2.10	Établissement du modèle de comportement	34
2.10.1	Choix des variables contrôlées	34
2.10.2	Choix des variables de contrôle	36
2.10.3	Hypothèses sur les mesures	36
2.10.4	Synthèse du modèle de comportement	36
2.11	Simulation en boucle ouverte	37
2.11.1	Modèle de simulation	37
2.11.2	Modèle de comportement	38
2.12	Conclusion	38
2.13	Perspectives	39
 II Synthèse de commande		41
 3 Commande de la dynamique longitudinale		43
3.1	Introduction	43
3.2	Définition du problème	44
3.3	Discussion sur la structure du modèle	44
3.4	L'oscillateur de Zhukovskii	45
3.4.1	Présentation	45
3.4.2	Stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii	48
3.4.3	Stabilité du mode phugoïde hypersonique	48
3.4.4	Application à la stabilité du vol hypersonique	51
3.5	Extension à un vol à énergie non constante	53
3.5.1	Modèle de comportement	53
3.5.2	Commande du vecteur vitesse par commande gradient	54
3.5.3	Commande de l'altitude	55
3.5.4	Synthèse finale de la loi de guidage	56
3.6	Pilotage par backstepping	58
3.7	Simulations et discussion	59
3.7.1	Le modèle de simulation	59
3.7.2	Croisière à différents paliers	60
3.7.3	Sensibilité à l'augmentation de poussée	61
3.7.4	Sensibilité aux conditions initiales	62
3.7.5	Sensibilité aux paramètres de modélisation	64
3.7.6	Désamorçage d'entrée d'air	66
3.8	Conclusion	67
3.9	Perspectives	69
 4 Guidage longitudinal et latéral		71
4.1	Introduction	71
4.2	Dynamique d'un vol à symétrie d'efforts	72
4.3	Modèle de comportement	72
4.4	Commande du vecteur vitesse	73
4.4.1	Synthèse d'une commande gradient	73
4.4.2	Prise en compte des saturations d'incidence	73
4.4.3	Application : stabilisation du vecteur vitesse par commande gradient	75
4.5	Stabilisation de la dynamique latérale du véhicule	77
4.5.1	Le modèle de comportement	77
4.5.2	Synthèse par domination	78

4.6	Synthèse finale de la loi de guidage 3D BTT	80
4.6.1	Simulation	81
4.7	Discussion sur la synthèse par d'autres approches	81
4.7.1	Définition du problème	81
4.7.2	Synthèse Lyapunov	83
4.7.3	Synthèse par <i>forwarding</i>	83
4.7.4	Synthèse par annulation	84
4.8	Conclusion	86
4.9	Perspectives	86
III Vers une régulation de sortie		87
5	Régulation asymptotique robuste	91
5.1	Introduction	91
5.2	Description du problème	91
5.3	Approche suggérée	92
5.4	Détermination de la commande du système étendu	95
5.4.1	<i>Forwarding</i> avec V et M connues	96
5.4.2	<i>Forwarding</i> avec V inconnue mais M connue	96
5.4.3	<i>Forwarding</i> avec V inconnue et M approchée	97
5.4.4	Lien avec la technique d'observateur de perturbation	98
5.5	Exemples d'applications	98
5.5.1	Stabilisation de l'oscillateur de Zhukovskii	98
5.5.2	Stabilisation du mode longitudinal d'un avion	100
5.5.3	Stabilisation d'un PVTOL	102
5.6	Conclusion	105
5.7	Perspectives	105
IV Annexes		107
A	Fonctions de Lyapunov, stabilité et stabilisation	109
A.1	Fonctions de comparaison, fonctions définies positives, fonctions propres	109
A.2	Stabilité	110
A.2.1	Définitions	110
A.2.2	Conditions suffisantes	110
A.3	Stabilisation asymptotique par bouclage statique	111
A.3.1	Définition du problème	111
A.3.2	Fonctions de Lyapunov assignables	111
A.3.3	Synthèse par annulation, par domination	112
B	Liste des acronymes	113
C	Nomenclature	115
Conclusion et perspectives		117
Bibliographie		119
Résumé général		126

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Sur le vol hypersonique aérobie

Définition 1.1 (Mach¹). Nombre défini par le rapport entre la vitesse d'un objet et celle du son à une altitude donnée.

Définition 1.2 (Propulsion aérobie²). Aérobie est un terme qui s'applique à un organisme vivant ou à un moteur qui a besoin d'air pour vivre ou fonctionner. Un moteur aérobie utilise l'oxygène de l'air ambiant comme comburant pour son fonctionnement.

Définition 1.3 (Domaine hypersonique). On entend par « hypersonique » le domaine où l'hypothèse des gaz parfaits n'est plus vérifiée. En pratique, on considère que ce régime est atteint à partir de Mach 5 environ.

Définition 1.4 (Statoréacteur³). Moteur aérobie ne comportant aucune partie mobile. Ce moteur simple et léger ne peut fonctionner par principe que si le véhicule propulsé possède une vitesse suffisante, en pratique au moins Mach 2.

Le vol hypersonique à propulsion aérobie consiste à voler à grande vitesse (Mach 5 et plus), en utilisant l'oxygène présent dans l'atmosphère pour assurer la combustion. En pratique, cela consiste à utiliser des moteurs de la famille des statoréacteurs, qui sont aptes à fonctionner à des vitesses élevées. On parle de statoréacteur lorsque la combustion à l'intérieur du réacteur se fait à vitesse subsonique, de superstatoréacteur lorsque la combustion est à vitesse supersonique, et de statomixte lorsque le moteur combine les deux régimes de combustion⁴.

1.1.1 Intérêt du vol hypersonique aérobie

Définition 1.5 (Impulsion spécifique⁵ (I_{sp})). Quotient de deux grandeurs dont l'une est la poussée d'un propulseur et l'autre le produit du débit massique de propergol par la valeur normale de l'accélération de la pesanteur.

L'intérêt du vol hypersonique aérobie est établi depuis de nombreuses années, et identifié comme l'un des prochains sauts technologiques à franchir dans le domaine des lanceurs spatiaux. Il se trouve que la collecte de l'oxygène pendant les phases de vol atmosphérique permet d'augmenter significativement l'impulsion spécifique (I_{sp}) de la propulsion, qui est un paramètre fortement dimensionnant pour l'efficacité globale du

1. Source : Onera.

2. Source : Wikipédia.

3. Source : Onera.

4. Dans le cas des statoréacteurs, la vitesse du flux traversant le moteur dépend de la vitesse d'opération du véhicule. Pour de très grandes vitesses, comprimer le flux d'air pour le ralentir à vitesse sonique ne permet pas d'établir un bilan aéropropulsif positif. D'où la nécessité de maîtriser des combustions à vitesse supersonique.

5. Source : Journal officiel.

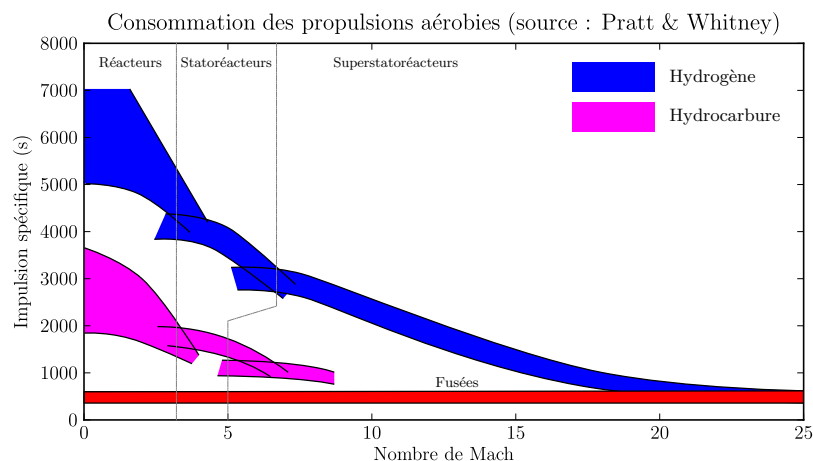


FIGURE 1.1 – Efficacité des propulsions aérobies.

véhicule. En effet, la stœchiométrie de la combustion hydrocarbure fixe le rapport masse comburant/carburant à environ 6. Ce qui signifie que, dans une propulsion fusée — ne brûlant que des ergols embarqués —, environ 6/7 de la masse d'ergol est un oxydant, alors que celui-ci est potentiellement disponible dans l'atmosphère.

Pour donner un cas d'application, l'étage accélérateur à poudre d'Ariane 5 est intégralement consommé⁶ au bout de 140 s de vol, à une altitude d'environ 65 km et une vitesse d'environ 2000 m.s⁻¹. L'étage embarquant environ 240 tonnes d'ergols, et la fusée étant munie de deux étages accélérateurs, il y a donc environ 411 tonnes d'oxydant qui sont brûlés dans l'atmosphère pendant les 140 premières secondes du vol de la fusée. Cette masse correspond à environ 55% de la masse de la fusée au décollage.

Cet exemple montre l'intérêt qu'il peut y avoir de capter l'oxygène de l'atmosphère pour améliorer la performance des lanceurs. Des études plus complètes, telles que Czysz et Bruno (2006) montrent effectivement qu'une propulsion aérobique opérationnelle jusqu'à Mach 12 permettrait de diviser par deux le rapport de masses⁷ pour la mise en vitesse orbitale. De ce fait, le rapport charge utile / masse au décollage des lanceurs serait quasi doublé. Par conséquent, une phase de vol atmosphérique permettrait des capacités d'emport significativement élevées en comparaison d'une propulsion fusée classique, réduisant d'autant le coût de l'accès à l'espace.

Définition 1.6 (Finesse). On appelle finesse d'un corps le rapport entre la portance et la traînée de ce corps. Les anglo-saxons la notent *lift-to-drag ratio*.

Définition 1.7 (Masse sèche⁸). Masse d'un véhicule spatial ou d'un étage de lanceur à l'exclusion des ergols et des autres matières consommables.

De façon conjointe, la maîtrise du vol hypersonique présente des intérêts stratégiques évidents. En effet, si les statoréacteurs « classiques » sont employés depuis de nombreuses années en armement, il se trouve cependant que l'augmentation de l' I_{sp} et de la vitesse de croisière impactent positivement les rayons d'actions des engins. Plus précisément, le rayon d'action est donné en première approximation par la formule de Bréguet-Leduc :

$$R = V_0 f I_{sp} \ln \frac{m_s + m_e}{m_s}, \quad (1.1)$$

où V_0 est la vitesse de croisière, f est la finesse, m_s est la masse sèche et m_e est la masse d'ergols. On voit directement qu'il y a un intérêt à maximiser le produit $V_0 f I_{sp}$, sachant que ces paramètres sont dépendants entre eux en pratique.

6. Sources : EADS Astrium. Données du vol 183 d'Ariane 5.

7. Masse finale divisé par la masse initiale.

8. Source : Journal officiel.

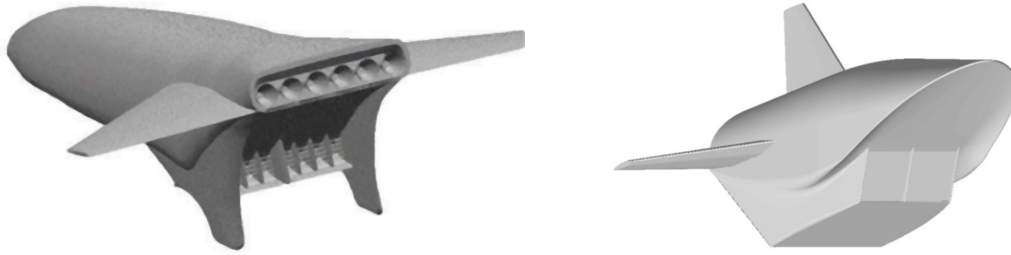


FIGURE 1.2 – Exemples de véhicules hypersoniques : Prepha et Japhar.

Pour donner un ordre de grandeur de l'apport de la propulsion aérobie à grande vitesse, la Figure 1.1 montre l'efficacité et le domaine d'opération des propulsions aérobies. Les statoréacteurs « classiques » alimentés en kérosène permettent actuellement d'atteindre des vitesses d'environ Mach 5. Au delà de cette vitesse, dans le cas d'une propulsion chimique, seules les fusées et les superstatoréacteurs permettent d'établir une poussée. Cependant, alors que l' I_{sp} des propulsions fusées⁹ ne dépassent pas 500 s, une propulsion aérobie avec un carburant hydrogène posséderait une impulsion spécifique entre 1800 et 4500 s sur une plage de vol entre Mach 3 et Mach 12. Il y a donc des gains de performance considérables à attendre de la propulsion aérobie à grande vitesse.

Enfin, des projets tels que LAPCAT¹⁰ et LAPCAT II, dont l'objectif est de réduire la durée des vols antipodaux, témoignent d'un intérêt récent pour le vol aérobie à grande vitesse appliqué à du transport aérien civil.

1.1.2 Un défi technologique

Cependant, ce tableau positif s'accompagne de défis technologiques conséquents, et ce, dans de nombreux domaines. La vitesse élevée des engins implique une forte dissipation thermique, une manœuvrabilité limitée, et impose de voler en altitude, où la densité de l'atmosphère est faible. La forme du véhicule se définit alors, notamment en fonction de ces éléments, avec une conception spécifique de l'aérodynamique et de la propulsion, intégrée au corps du véhicule. Des exemples de tels véhicules sont donnés Figure 1.2. De plus, les conditions de fonctionnement de ce type de véhicule sont telles qu'il est difficile de reproduire au sol de nombreux phénomènes impliqués en environnement maîtrisé. Parmi ceux-ci, on peut citer : l'aérodynamique hypersonique ; les décollements de couche limite ; la combustion à vitesse supersonique.

Ainsi, la mise au point d'outils et techniques permettant de prédire avec précision le bilan aéropropulsif des véhicules hypersoniques (HSV) reste aujourd'hui un des principaux axes de développement qui concentre les efforts de recherche dans le domaine. Ensuite, les domaines d'opération de ces engins sont très limités. En effet, la configuration aérodynamique et aéropropulsive des HSV est conçue pour d'étroites plages de variations autour des valeurs nominales de fonctionnement. Enfin, la forte intégration de la propulsion avec l'aérodynamique du véhicule pose des problèmes de couplage — notamment entre propulsion et aérodynamique¹¹ — qui n'existent pas avec des engins à moteurs fusées ou à réacteurs.

En conséquence, dans une perspective de commande, la modélisation des HSV doit faire face à de sérieuses incertitudes concernant la réalité physique des phénomènes en jeu. Par ailleurs, il y a un intérêt à contraindre l'excursion de l'état du véhicule dans un

9. Typiquement, des carburants à poudre possèdent une I_{sp} de 275 s, les couples oxygène/kérosène liquides fournissent 335 s, et des couples oxygène/hydrogène liquides atteignent 440 s.

10. *Long-Term Advanced Propulsion Concepts and Technologies* ; projet cofondé par la Commission Européenne pour l'étude des technologies permettant de relier Bruxelles à Sydney en 2-4 h. http://www.esa.int/techresources/lapcat_II

11. Cette interaction entre le système de propulsion et le comportement aérodynamique est notamment résultante du fait que le véhicule est conçu tel que l'intrados du véhicule joue le rôle de système de compression pour la propulsion. L'attitude aérodynamique du véhicule a un effet direct sur le flux d'air qui traverse la propulsion.



FIGURE 1.3 – Vue d’artiste du véhicule X-43A. Source : NASA

domaine de sécurité. Enfin, le comportement du véhicule dépend sensiblement du point de vol considéré, ce qui témoigne de la nature non linéaire des phénomènes en jeu.

1.2 Bibliographie

Deux sillons dominent la bibliographie sur la commande des HSV. La première est liée aux modèles développés par l’*US Air Force* (USAF), et est la plus féconde.

1.2.1 Autour des programmes NASP et Hyper-X de l’USAF

Les premiers travaux sur la commande des HSV furent menés par Frank Chavez et David Schmidt dans le cadre du programme *National Aero-Space Plane* (NASP) et Hyper-X. Ces travaux ont probablement servi de base théorique pour les lois de commande du HSV X-43A testé entre 2001 et 2005 aux États-Unis.

Dans Chavez et Schmidt (1992), un modèle est développé et analysé. Il se base sur une approximation Newtonienne d’écoulement, dans le plan longitudinal, sur un modèle élastique. Cette analyse est combinée à une analyse aérothermique de la propulsion en 1D. Les résultats indiquent une instabilité du mode de rotation, des effets de dynamique aéro-thermo-élastique, ainsi qu’un couplage significatif entre la propulsion et l’aérodynamique du véhicule. Ce modèle est étudié localement dans une perspective de commande dans Chavez et Schmidt (1993). En complément de la confirmation des points précédents, les auteurs constatent une grande variabilité des modes en fonction de la poussée ou des gouvernes. Ils affirment donc la nécessité de travailler sur des modèles tenant compte du couplage aérodynamique/propulsion. Par ailleurs, un des effets notables de l’effet d’élasticité se trouve être une réduction de la pression dynamique en amont de l’instabilité.

Dans Schmidt et Velapoldi (1999), une synthèse de guidage 2D dans le plan longitudinal est proposée sur le modèle présenté précédemment. Le modèle considéré est à déphasage non minimal et instable en boucle ouverte. Une loi de commande linéaire est proposée pour contrôler l’altitude et l’énergie du véhicule. La commande stabilise l’équilibre du système, mais les performances en boucle fermée sont limitées par la présence d’un zéro de transmission instable. Suite à ces travaux, une synthèse de commande LPV est proposée dans Lind (2002).

En 2007, Michael Bolender et David Doman publient un nouveau modèle de HSV dans Bolender et Doman (2007), dans le plan de symétrie verticale, sur la base de considérations semi-empiriques. Ce modèle leur a permis de mettre en évidence un phénomène de dynamique inverse instable, ainsi que différents effets oscillatoires de haute fréquence. Une analyse modale du linéarisé est effectuée, dont les conclusions sont relativement proches de ceux présentés dans Chavez et Schmidt (1992), confirmant les contraintes et

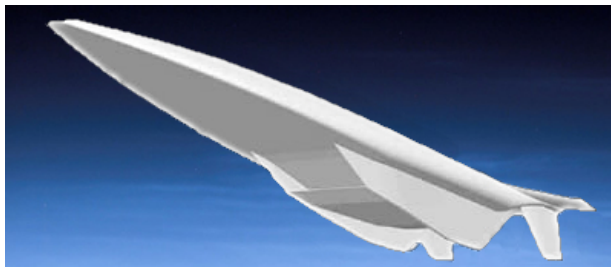


FIGURE 1.4 – Vue d’artiste du véhicule LÉA.

difficultés spécifiques aux HSV. Cette modélisation est suivie de Parker et al. (2007) qui spécialise le modèle pour la commande. Le modèle publié est exploitable pour la commande non linéaire, et un exemple de synthèse par inversion dynamique est proposée. Pour y parvenir, les auteurs considèrent l’ajout d’un aileron canard dans la configuration aérodynamique du véhicule. Sur la base de ces travaux, une autre synthèse par inversion dynamique est proposée dans Sigthorsson et al. (2008), basée sur les méthodes de régulation proposées dans Isidori et al. (2003).

Plus récemment, Fiorentini et al. (2009) propose un contrôle non linéaire en 2D, mettant en œuvre une combinaison d’inversion dynamique et de commande non linéaire. La stabilité de l’équilibre en boucle fermée est établie *via* une analyse non linéaire, et la robustesse aux incertitudes de modélisation est garantie par une approche adaptative. Dans Wilcox et al. (2010), une synthèse Lyapunov est proposée sur la base d’une approximation LPV d’un modèle incluant des effets d’élasticité. Pour rejeter des erreurs non nulles à l’équilibre, les auteurs étendent l’état du système avec l’intégration de l’erreur de sortie. Cela permet d’assurer la convergence asymptotique de la sortie à la consigne.

1.2.2 Autour de l’université de Californie

Dans Wang et Stengel (2000), les auteurs proposent une synthèse par inversion dynamique, basée sur un modèle empirique de HSV, dérivé d’un avion, en 2D dans le plan de symétrie vertical. Cependant, Menon (2001) note que les auteurs ne tiennent pas compte dans leur modèle du rôle joué par les gouvernes sur les HSV, menant à des modèles à déphasage non minimal. En s’appuyant sur les travaux précédents, Xu et al. (2001); Fidan et al. (2003); Xu et Ioannou (2004) proposent une synthèse de commande par modes glissants adaptatif.

En complément de ces études, il est utile de noter que Keshmiri et al. (2005); Mirmirani et al. (2005); Clark et al. (2006) ont présenté des travaux pour constituer une base de connaissance permettant de décrire un véhicule hypersonique générique. L’aérodynamique est modélisée à partir de simulation d’écoulements 2D, et la propulsion est modélisée à partir de simulations d’écoulement 1D.

1.2.3 Développements au sein de l’Office National d’Étude et de Recherche Aérospatiale

La recherche autour des technologies de propulsion aérobie hypersonique est un sujet étudié de longue date au sein de l’Office National d’Étude et de Recherche Aérospatiale (Onera), notamment au travers des programmes PREPHA (1992–1998), JAPHAR (1997–2002), PROMÉTHÉE (1999–2002), et actuellement le programme LÉA décrit dans Falempin et Serre (2009). Dans ce cadre, des études sur la commande des HSV ont été menées. Il a été mis en œuvre des commandes linéaires, une commande par inversion dynamique, ainsi qu’une commande par *backstepping*. Voir Zakrzewski (2007); Piet-Lahanier (2007).

1.3 Motivation de l'étude

De nombreuses études attestent que ces véhicules ont des spécificités dont il faut tenir compte au niveau de la loi de commande. Parmi elles, on peut citer notamment : une aérodynamique ayant des modes flexibles, une propulsion couplée à l'aérodynamique du véhicule, des modèles à déphasage non-minimal, de fortes incertitudes de modélisation, une plage de fonctionnement étendue en Mach, un domaine de sécurité étroit impliquant des contraintes strictes sur l'excursion de l'état. Une étude sur la synthèse de commande doit donc prendre en compte ces différentes spécificités.

L'objectif de l'étude présentée ici est de proposer une méthode permettant de prendre en compte les points suivants :

- traiter le problème de modèle à déphasage non minimal sans le négliger ni modifier la structure du véhicule par l'ajout d'ailerons canards ;
- proposer une synthèse qui tienne compte du caractère non linéaire de la dynamique du véhicule et des couplages que cela implique dans un domaine de fonctionnement aussi étendu que possible ;
- proposer une synthèse qui soit robuste aux nombreuses incertitudes de modélisation ainsi qu'aux dynamiques négligées ;
- proposer une synthèse qui limite l'excursion des variables d'état ou de commande afin de maintenir tant que possible le véhicule dans son domaine nominal de fonctionnement.

Pour ces raisons, nous avons investi l'étude de synthèse de loi de commande basées sur des fonctions de Lyapunov¹², en mettant l'accent sur la recherche de commandes gradients. L'intérêt de celles-ci est de permettre d'une part la prise en compte de saturations d'actionneur ou la saturation d'état, ce qui nous permet d'exploiter au mieux les possibilités de commande, et d'autre part, en procédant de la sorte nous pouvons obtenir des lois de commandes n'embarquant que peu d'information spéculative sur le modèle, ce qui permet d'obtenir des propriétés structurelles de robustesse. La démarche est alors articulée autour de quatre grands axes détaillés ci-après.

1.4 Démarche poursuivie

Nous avons d'abord travaillé à recenser, discuter, sélectionner et modéliser différents phénomènes qui interviennent au cours du vol des HSV. De nombreuses considérations sont développées de façon empirique, et leur origine provient d'éléments bibliographiques ou de l'expertise interne à l'Onera. Ce travail débouche sur un modèle de simulation, développé au Chapitre 2. En parallèle de ce travail, nous développons un modèle pour la commande, sous forme d'équations différentielles, qui est formulé à la Section 2.10. Le modèle de comportement, associé aux contraintes formulées, permet de poser le problème de commande que nous nous proposons d'étudier. Notons que ce chapitre introduisant de nombreuses variables physiques, le lecteur trouvera en Annexe C (page 115) une nomenclature des variables utilisés.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de ce problème de commande, dans le but d'obtenir une synthèse de commande en 2D, dans le plan longitudinal. Pour cela, nous avons étudié la synthèse de lois de commandes basées sur des fonctions de Lyapunov en vue de stabiliser des trajectoires de croisière. De plus, il se trouve que la définition d'un pilote séparément d'une loi de guidage dans un contexte fortement contraint mène à des problèmes de sur/sous-spécification. Ceci pose des problèmes pratiques d'efficacité du contrôle. Suivant l'esprit des travaux de Thiele (1999); Andrieu et Piet-Lahanier (2004), menés au sein de l'ONERA, nous nous sommes orientés vers une loi de commande qui résout simultanément le problème de guidage et de pilotage. Ceci est fait dans le but d'obtenir un pilote adapté à l'objectif de guidage du véhicule sur un palier stabilisé. Différents cas de simulation sont testés, afin de montrer les propriétés du véhicule contrôlé par la commande proposée.

¹². Voir Annexe A.

Le Chapitre 4 décrit ensuite comment étendre la loi de commande développée dans le contexte plus réaliste d'un véhicule en dimension complète, ayant 6 degrés de liberté. Une extension est proposée pour obtenir une commande simultanée des dynamiques longitudinales et latérales du véhicule, sous les différentes contraintes établies. Le résultat obtenu est illustré sur de nouvelles simulations, avec un modèle simplifié.

Cependant, si les différents résultats obtenus montrent de bonnes propriétés de robustesse de la loi de commande par rapport à des incertitudes de modélisation, elles ne garantissent pas en revanche la convergence asymptotique de la trajectoire vers la consigne. On remarque une erreur de poursuite qui peut être conséquente dans les simulations réalisées. Afin de palier ce déficit et d'améliorer les lois de commande proposées dans les chapitres précédents, le Chapitre 5 étudie un problème de régulation asymptotique robuste. Nous montrons que ce problème peut être résolu en stabilisant un modèle augmenté d'un intégrateur de la sortie. Il s'agit d'une extension de la structure de contrôle proportionnel-intégral (PI) au cas des systèmes non linéaires. Un critère de robustesse par rapport aux incertitudes de modèle est formulé, et nous proposons des techniques adaptées pour la synthèse de commande pour ce cas particulier d'extension de modèle.

Première partie

Modélisation

Chapitre 2

Modélisation d'un véhicule hypersonique à propulsion aérobie

Résumé. La modélisation d'un véhicule hypersonique (HSV) est un préalable pour la commande. Nous avons besoin d'une part d'un modèle capitalisant la connaissance que nous avons des HSV, afin de constituer une base de validation par la simulation, et d'autre part d'un modèle de comportement utilisable pour la synthèse de commande. Pour cela, nous établissons ici l'ensemble des phénomènes impliqués à différents niveaux pour modéliser le vol d'un HSV : l'aérodynamique, la propulsion, ainsi que les principales hypothèses qui les encadrent. Deux modèles en résultent : un modèle de simulation et un modèle de comportement. Une simulation en boucle ouverte est réalisée pour illustrer les principaux modes propres du véhicule modélisé, ainsi que l'identification du modèle de comportement au modèle de simulation le long des trajectoires à contrôler.

2.1 Introduction

Nous développons deux modèles : le premier pour la simulation, le second pour la commande. Le premier a pour objectif d'être relativement proche de la physique du véhicule. La simulation nous permettra ultérieurement de vérifier certaines propriétés de notre commande par rapport à différentes hypothèses simplificatrices qui auront été faites pendant la synthèse. Pour la commande, il faut disposer d'un modèle de comportement, rassemblant la connaissance *a priori* que l'on a du système et qui sera, au moins en partie, intégrée dans le contrôleur.

Or, l'étude de la commande des HSV étant relativement peu développée au démarrage de nos travaux, dans un domaine au spectre étroit et souvent confidentiel, nous ne disposons alors ni d'un modèle de simulation relativement complet et représentatif d'un véhicule, ni d'un modèle de comportement adapté au problème de commande que nous envisageons. Nous avons donc posé comme objectif l'établissement d'un modèle de simulation de HSV, dont nous déduisons un modèle de comportement pour synthétiser notre loi de commande.

Pour cela, nous commençons par rappeler le contexte, le périmètre et la méthodologie de modélisation (Section 2.2). Le modèle est ensuite présenté (Section 2.3) avant d'être développé en détails. Nous précisons alors les efforts dominants intervenant au cours du vol du véhicule, c'est-à-dire les efforts aérodynamique du véhicule (Section 2.4), puis la propulsion. Concernant cette dernière, nous proposons de la modéliser par une approche détaillée pour la simulation (Section 2.5), puis par une approche synthétique pour le

modèle de comportement (Section 2.6). Nous modélisons ensuite des considérations additionnelles pour établir la dynamique du véhicule (Section 2.7). À l'issue de cette revue des phénomènes physiques impliqués dans le vol des HSV, nous précisons les variables de contrôle et de sortie, afin de d'établir le modèle de comportement (Section 2.10). Une simulation en boucle ouverte des deux modèles est finalement réalisée pour illustrer les principaux modes propres du véhicule modélisé et constater la capacité du modèle de comportement à rendre compte du comportement du véhicule (Section 2.11).

2.2 Périmètre de la modélisation

2.2.1 Rôle de la modélisation

Notre objectif est ici de recueillir, discuter et contextualiser la connaissance que nous avons des phénomènes en œuvre dans le vol des HSV afin de constituer un modèle de simulation. Ce modèle nous servira de base de connaissances et nous permettra de vérifier les propriétés de notre commande par rapport aux différentes hypothèses simplificatrices qui auront été faites à l'occasion de la synthèse.

2.2.2 Contexte de l'étude

Définition 2.1 (Stratosphère¹). Partie supérieure de l'atmosphère, où les gaz sont en repos presque complet.

Nous nous intéressons à la modélisation d'un véhicule démonstrateur conçu pour accélérer dans la stratosphère jusqu'à Mach 8 depuis une vitesse initiale de Mach 4. Cette plage est retenue d'une part parce que la modélisation du véhicule y est relativement homogène et d'autre part parce qu'elle est représentative des données de simulation disponibles.

Le véhicule simulé possède un rapport poussée/masse d'environ 3 et une finesse d'environ 3,7 à Mach 8. La masse sèche du véhicule est de 2650 kg, et il peut embarquer 2350 kg de carburant.

Les trajectoires considérées sont des trajectoires de croisières, définies par le Mach et l'altitude. Le véhicule est commandé par des gouvernes positionnées en empennage, et équipé d'une propulsion aérobie commandée en débit de carburant.

Les principales informations dont nous disposons concernant les écoulements étant définies dans le plan vertical de symétrie, les effets aérodynamiques et aéro-propulsifs liés aux écoulements en trois dimensions ne seront pas abordés dans cette étude.

2.2.3 Méthodologie de définition des modèles

Il n'existe pas de modèle de référence décrit à ce jour pour ce type de véhicule. Il s'agit donc dans ce chapitre d'exposer différents phénomènes en jeu dont l'agrégation constituera notre modèle de simulation. Il s'agit essentiellement de l'aérodynamique, de la propulsion et de la mécanique du vol.

Les connaissances décrites ici sont en partie spéculatives. De nombreux phénomènes sont décrits dans ce chapitre de façon simplifiée, et de façon empirique. Notre ambition au travers ce travail n'est pas d'expliquer chaque phénomène en détail, seulement de les décrire et les qualifier. En effet, ceux-ci étant généralement complexes et souvent méconnus — car difficiles à reproduire en environnement contrôlé —, ils sont chacun au cœur de différents programmes de recherche contemporains et génèrent une littérature abondante. Le lecteur intéressé pourra donc se référer à la littérature spécialisée pour approfondir, notamment à partir de Heiser et Pratt (1994) ainsi que les différents actes des conférences *Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference* (SPHSTC) de l'*American Institutes of Aeronautics and Astronautics* (AIAA).

1. Source : Wiktionnaire.

Modèle de simulation

Généralement, un véhicule est optimisé pour opérer sur un point de croisière précis, défini par le Mach (donc la vitesse aérodynamique $V_{\text{Aéro}}$) et l'altitude h . Ensuite, une adaptation de ses performances est réalisée pour assurer le fonctionnement dans une plage autour de ce point de vol. Supposons donc un véhicule effectuant une croisière à un point de vol donnée. Le poids du véhicule en vol (produit de la masse m par la gravitation g) doit être compensé par la force F_z de sustentation du véhicule, essentiellement définie par le point de vol et les caractéristiques aérodynamiques du véhicule, c'est-à-dire la surface alaire S_{ref} et le coefficient de portance C_z . D'où

$$mg = F_z = \frac{1}{2}\rho(h)V_{\text{Aéro}}^2 S_{\text{ref}} C_z. \quad (2.1)$$

La portance étant relativement stable pour une classe de véhicule donnée, il suffit² d'ajuster la surface alaire à la masse et au point de vol, ainsi que de reprendre des données aérodynamiques représentatives de la classe de véhicule considéré pour obtenir un véhicule volant, en prenant soin de considérer suffisamment de marge pour permettre au véhicule de manœuvrer.

L'existence d'une portance impliquant nécessairement l'existence d'une traînée F_x dans des proportions stables pour une classe de véhicule donnée, nous pouvons alors dimensionner une propulsion T_0 qui permettra d'équilibrer le vol, avec suffisamment de marge pour réaliser des accélérations. Par exemple

$$T_0 = \frac{1}{2}m\rho(h)V_{\text{Aéro}}^2 S_{\text{ref}} C_x = \frac{mg}{f}, \quad T_{\text{max}} = 1,1T_0, \quad (2.2)$$

où f est la finesse du véhicule.

Ayant exclu les questions de mission et de faisabilité du véhicule, telle que par exemple l'adéquation de la surface alaire avec le volume de carburant nécessaire à la mission, la définition d'un hypothétique véhicule est donc réduite à l'ajustement des contraintes aéro-propulsives, ce qui nécessite de définir une aérodynamique et une propulsion. C'est pourquoi nous faisons principalement état dans ce chapitre de ces différents éléments.

Remarque 2.1. Nous basons cette étude sur l'hypothèse que nous pouvons dissocier l'étude des modèles aérodynamiques de ceux relatifs à la propulsion. Ce qui suppose par exemple que l'aérodynamique ne subisse pas trop d'influence directe du fait des écoulements liés à la propulsion, et *vice versa*. Remarquons que c'est une hypothèse forte et difficile à vérifier en l'état de la technologie actuelle. Cet élément renforce les aspects d'incertitude qui seront évoqués.

Modèle de comportement

Le modèle de comportement est dérivé du modèle de simulation. Celui-ci s'obtient de deux façons : soit par simplification, soit par changement de variable. La simplification peut consister à négliger des phénomènes dynamiques, considérés suffisamment lents ou rapides à l'échelle de la trajectoire du véhicule, ou bien à re-paramétriser de façon plus simple le modèle de simulation.

2.3 Présentation du modèle de simulation

Le modèle dynamique considéré dans le plan de symétrie vertical est un agrégat de différents modèles. Les différents modèles et paramètres sont décrits dans les sections qui suivent. Les termes utilisés sont également définis dans l'Annexe C.

2. Il s'agit ici d'une démarche simplifiée de conception. En pratique, dans le cas des HSV, des choix faits au niveau de la propulsion jouent un rôle sur l'équilibrage et la portance.

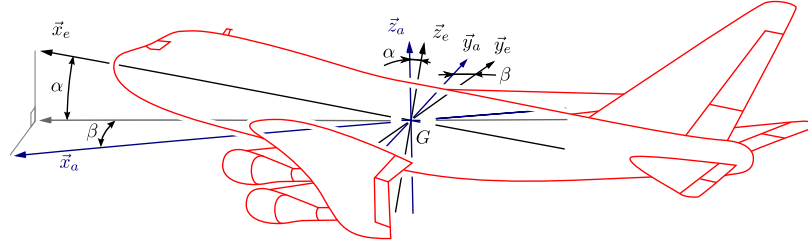


FIGURE 2.1 – Trièdre aérodynamique et trièdre engin. On passe du trièdre aérodynamique $(G, \mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)$ au trièdre engin $(G, \mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e, \mathbf{z}_e)$ par une rotation d'angle β autour de l'axe \mathbf{z}_a , suivie d'une rotation d'angle α autour de l'axe \mathbf{y}_e .

Les équations de mécanique du vol issues des lois de la mécanique Newtonienne sont

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}V + m\dot{V} &= T(h, V_{\text{Aéro}}, \mathcal{M}, \alpha, Q_c) \cos(\alpha + \varphi_f) \\ &\quad - F_x(h, V_{\text{Aéro}}, \mathcal{M}, \alpha, \delta) - mg(h, V, \gamma) \sin \gamma, \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\begin{aligned} mV\dot{\gamma} &= T(h, V_{\text{Aéro}}, \mathcal{M}, \alpha, Q_c) \sin(\alpha + \varphi_f) \\ &\quad + F_z(h, V_{\text{Aéro}}, \mathcal{M}, \alpha, \delta) - mg(h, V, \gamma) \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2.3c)$$

où (h, V, γ) est composé respectivement de l'altitude, la vitesse et la pente de vitesse; T désigne la poussée, décrite par (2.12); F_x et F_z désignent respectivement la traînée et la portance et décrites par (2.5). Notons que α désigne l'incidence du vol. Par définition, $\alpha = \theta - \gamma$, où θ est l'assiette longitudinale.

À cela s'ajoute la dynamique de rotation :

$$\dot{\theta} = q, \quad (2.3d)$$

$$j_e q \dot{m} + J(m)\dot{q} = M_y(h, V_{\text{Aéro}}, \mathcal{M}, \alpha, \delta, q) + l_T(\varphi_f)T(h, V_{\text{Aéro}}, \mathcal{M}, \alpha, Q_c), \quad (2.3e)$$

avec q désignant la vitesse de rotation; M_y désignant le moment de rotation et décrit par (2.9); et J le moment d'inertie.

Enfin, nous considérons un modèle dynamique de gouverne

$$\dot{\delta}_d = \text{sat}(\omega_\delta, -\bar{\omega}, \bar{\omega}), \quad (2.3f)$$

$$\dot{\omega}_\delta = -2\zeta\omega_0\omega_\delta - (\delta_d - \delta_r)\omega_0^2, \quad (2.3g)$$

avec $\delta = \text{sat}(\delta_d, -\bar{\delta}, \bar{\delta})$, et le modèle de variation de masse

$$\dot{m} = -Q_c. \quad (2.3h)$$

Les commandes de ce modèle sont la consigne de gouvernes δ_r et la consigne de débit massique de carburant Q_c .

2.4 Modélisation aérodynamique

Définition 2.2 (Incidence). L'incidence est l'angle formé entre le vecteur vitesse aérodynamique et l'axe engin longitudinal, projeté dans le plan $(G, \mathbf{x}_e, \mathbf{z}_e)$ du repère engin. Voir Figure 2.1.

Définition 2.3 (Dérapage). Le dérapage est l'angle formé entre le vecteur vitesse aérodynamique et l'axe engin longitudinal, projeté dans le plan $(G, \mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a)$ du repère aérodynamique. Voir Figure 2.1.

2.4.1 Spécificité des HSV

Les contraintes actuelles d'ingénierie font qu'un véhicule réalisant une croisière à haute altitude et haute vitesse possède plusieurs spécificités.

D'une part, l'engin doit fonctionner sur une large gamme de vitesses. Le nombre de Mach de l'écoulement considéré varie alors considérablement au cours du vol. Par exemple, la plage de fonctionnement des statoréacteurs et superstatoréacteurs s'étend de Mach 2 à Mach 15.

D'autre part, la configuration aérodynamique du véhicule suppose des gouvernes de taille importante. Cette particularité est en partie due à la technologie de propulsion qui implique des moments résultants ou des couplages aérodynamiques à compenser, mais c'est aussi une conséquence de la qualité de démonstrateur du véhicule : le fait que le véhicule soit de petite taille, associé à la nécessité de marges de conception élevées pour palier la méconnaissance des modèles, participe au besoin d'importantes voilures de commande. Cette configuration implique donc qu'une part significative de la voilure portante est contrôlée (environ 25%).

2.4.2 Dynamique des interactions

Stabilité des écoulements aérodynamiques

Rappelons que de nombreux travaux³ font état d'effets d'élasticité et d'interactions entre le flux et la structure à l'origine de dynamiques rapides perturbant la commande. Ces travaux décrivent d'une part des modes d'interaction fluide/structure avec une fréquence propre d'environ 18 Hz sur leur cas d'étude. D'autre part il serait question d'effets d'aéro-élasticité ayant une fréquence propre d'environ 50 Hz.

L'existence de ces fréquences de résonance laisse donc supposer que l'aérodynamique du véhicule sera soumise à des cycles limites relativement rapides. Cependant, l'incapacité de modéliser ces phénomènes dans un environnement contrôlé implique une méconnaissance de ces phénomènes physiques, et nous ne sommes pas à ce jour en position de disposer de modèles représentatifs de leurs effets. Aujourd'hui, l'étude de ces phénomènes est hors de portée d'une expérimentation dans une soufflerie, et il semble que seules des études en vols permettraient d'acquérir une meilleure connaissance à leur sujet.

Ce que nous pouvons supposer au sujet de ces effets d'aéro-élasticité, c'est qu'il existera des cycles limites stables liés à ce type d'interactions. Nous feront l'hypothèse que la structure du véhicule est conçue de sorte que la fréquence des premiers modes propres liée à l'aéro-élasticité soit suffisamment élevée pour ne pas affecter le comportement en vol. Par conséquent, nous négligerons ces dynamiques rapides à l'échelle de la trajectoire. Aussi, il faudra réaliser la synthèse du contrôleur de sorte qu'il n'excite pas les dynamiques rapides négligées.

Par ailleurs, les effets des phénomènes d'aéro-élasticité seront au delà de la seule excitation en fréquence. En effet, une composante « moyennée dans le temps » de ces perturbations sera nécessairement présente, rendant particulièrement difficile à prévoir les coefficients aérodynamiques du véhicule. Par conséquent, nous devrions composer avec des incertitudes conséquentes en la matière, ce qui implique de ne pas supposer l'aérodynamique du véhicule exhaustivement connue au cours de la synthèse de commande.

Approximation 2.1. Les dynamiques rapides des interactions fluide/structure sont négligées.

Dynamique des gouvernes

Concernant les gouvernes, il y a deux échelles de temps à considérer : la dynamique des gouvernes en tant que mécanisme, et la dynamique de déflexion du flux.

Les gouvernes modifient le comportement aérodynamique du véhicule, rendant possible le contrôle de son orientation. Dans la mesure où une dynamique d'actionneur est

3. voir notamment Sigthorsson et al. (2008); Parker et al. (2007); Bolender et Doman (2007); Chavez et Schmidt (1993) ainsi que les références incluses.

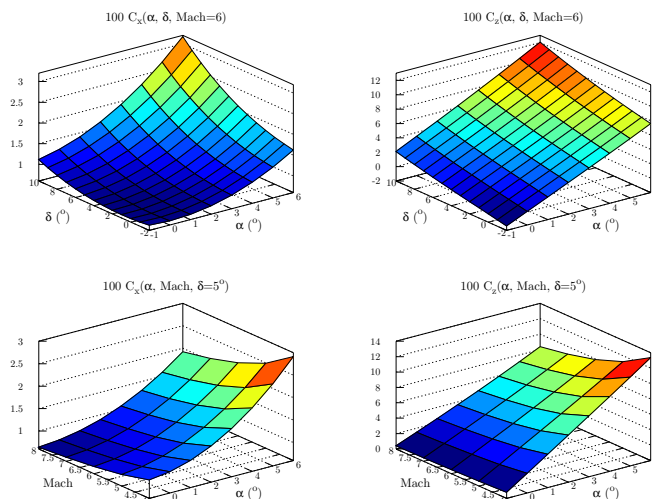


FIGURE 2.2 – Coefficients de forces aérodynamiques en fonction de l'incidence α , de l'angle de gouvernes δ et du nombre de Mach. Notons la dépendance sensiblement linéaire de la portance rapport à la géométrie de l'écoulement, ainsi que la dépendance sensiblement quadratique de la traînée par rapport aux mêmes variables. Par ailleurs, comparé à des véhicules plus traditionnels comme les avions, l'effet de l'angle des gouvernes sur la résultante des forces aérodynamique est ici remarquable.

susceptible de dégrader les performances du pilote, nous en tenons compte dans le modèle de simulation. Nous les modélisons par un système mécanique du second ordre, limité par une saturation en vitesse. Nous proposons le modèle dynamique suivant, très générique :

$$\dot{\delta}_d = \text{sat}(\omega_\delta, -\bar{\omega}, \bar{\omega}), \quad \dot{\omega}_\delta = -2\zeta\omega_0\omega_\delta - (\delta_d - \delta_r)\omega_0^2, \quad \delta = \text{sat}(\delta_d, -\bar{\delta}, \bar{\delta}), \quad (2.4)$$

avec δ étant la déflexion réelle du flux aérodynamique, δ_r la valeur de consigne fournie à l'actionneur, et les différents paramètres $(\bar{\delta}, \bar{\omega}, \zeta, \omega_0)$ respectivement sélectionnés à $(\frac{14}{18}\pi, 10\pi, \sqrt{2}/2, \pi)$. La fonction de saturation que nous retenons est $\text{sat}(s, \underline{s}, \bar{s}) = \min(\max(s, \underline{s}), \bar{s})$. L'effort produit par la déflexion du flux aérodynamique est du reste un effet aérodynamique rapide en comparaison de la dynamique de pilotage.

Autres considérations sur l'aérodynamique

D'autres phénomènes spécifiques peuvent apparaître, par exemple la possibilité d'érosion de la structure du véhicule sous les contraintes thermo-mécaniques. En effet, des matériaux ablatifs peuvent être utilisés sur des parties du véhicules soumise à de fortes contraintes, par exemple le nez du véhicule. L'érosion d'une telle partie le long de la trajectoire peut modifier de façon significative le comportement aérodynamique du véhicule. Selon la conception du véhicule, il pourrait donc se révéler nécessaire de modéliser ce phénomène pour l'intégrer au niveau du contrôleur. Cependant, du fait de son caractère spécifique, nous ne prenons pas en compte cet aspect dans nos travaux.

Approximation 2.2. Le modèle aérodynamique est constant le long de la trajectoire.

2.4.3 Analyse de simulation

Les Figures 2.2 et 2.3 illustrent des résultats de simulation pour une configuration aérodynamique de véhicule hypersonique, sans propulsion. Il s'agit de simulations réalisées au sein de l'Onera, dans le plan vertical de symétrie du véhicule. Les données présentées correspondent aux coefficients aérodynamiques écrits dans le repère aérodynamique.

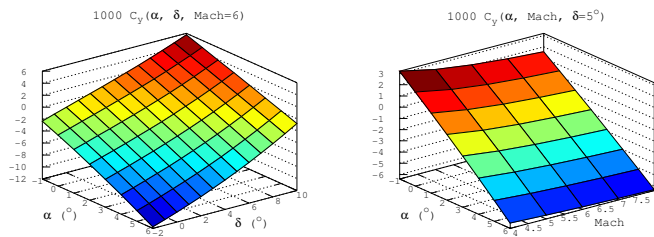


FIGURE 2.3 – Coefficient de moment aérodynamique de tangage réduit au centre de masse, en fonction de l’incidence α , de l’angle des gouvernes δ et du nombre de Mach. Notons la dépendance linéaire du moment par rapport à la géométrie de l’écoulement, et la faible dépendance en Mach.

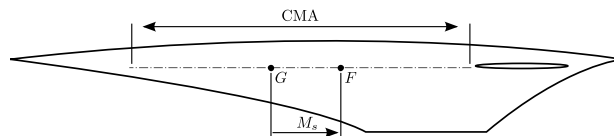


FIGURE 2.4 – Marge statique : illustration de la Définition 2.4. La marge statique M_s vérifie ici $M_s = 100 \cdot GF / |CMA|$, où CMA désigne la corde aérodynamique moyenne.

Définition 2.4 (Marge statique⁴). Grandeur physique qui permet d’évaluer la maniabilité et la stabilité d’un aéronef. La marge statique correspond à la valeur algébrique de la distance entre les projections du centre de gravité et du foyer aérodynamique d’un avion sur une corde de référence longitudinale (voir Figure 2.4), exprimée en pourcentage de la longueur de cette corde, et considérée comme positive lorsque le foyer est en arrière du centre de gravité.

Les données présentées mettent en évidence les caractéristiques présentées comme spécifiques aux HSV.

D’une part les effets de forces provoquées par les gouvernes sont importants et non négligeables en comparaison des effets de l’incidence. Cela implique potentiellement une obstruction à la commandabilité du véhicule. En effet, dans le cas d’un véhicule contrôlé par des gouvernes placées en empennage, une augmentation de l’incidence nécessite une diminution significative de la portance de la gouvernes et *vice versa*. La façon de composer avec ces dynamiques inverses fait l’objet de nombreuses études, nous y reviendrons à la Section 2.10. En comparaison, dans le cas d’un avion plus classique, ces effets dits de « forces directes » existent également, mais sont généralement négligeables.

D’autre part, le Mach a une influence notable sur l’aérodynamique du véhicule dans le domaine considéré, ce qui nécessite d’en tenir compte au niveau de la modélisation. Nous tâcherons ci-après de dissocier la contribution « purement géométrique » de l’écoulement de celle du Mach, afin de retrouver un modèle aérodynamique plus proche de celui de l’aérodynamique d’un avion subsonique.

Toutefois, si la dépendance en Mach des différentes forces est importante, elle l’est beaucoup moins concernant le moment. Or, le moment étant sommairement l’intégration des efforts de portance le long de la voilure, la raison pour laquelle il est peu dépendant du Mach est que le foyer aérodynamique varie. En pratique, on observe sur ce jeu de données que le foyer aérodynamique recule lorsque le Mach augmente, réduisant au passage la marge statique, garante de la stabilité du mode de rotation en boucle ouverte.

Enfin, on notera que de façon analogue à de nombreux modèles aérodynamiques d’avions subsoniques, l’influence des angles α et δ sur les forces et sur le moment aérodynamique est en bonne approximation linéaire ou quadratique. Ceci est en grande partie due à la faible excursion des angles α et δ déterminants la géométrie des écoulements.

4. Source : Journal Officiel.

2.4.4 Modélisation des forces aérodynamiques

Modèle de simulation

De façon très classique, les forces sont modélisées via les coefficients aérodynamiques présentés à la Figure 2.2 :

$$F_z = \frac{1}{2}\rho(h)V_{\text{Aéro}}^2 S_{\text{ref}} C_z(\alpha, \delta, \mathcal{M}), \quad F_x = \frac{1}{2}\rho(h)V_{\text{Aéro}}^2 S_{\text{ref}} C_x(\alpha, \delta, \mathcal{M}). \quad (2.5)$$

Modèle de comportement

Nous commençons par négliger la dynamique des gouvernes. Par conception, celle-ci doit être suffisamment rapide pour être considérée instantanée du point de vue du pilote, en bonne approximation. En conséquence, dans le modèle de comportement, nous confondons δ et δ_r .

Approximation 2.3. La dynamique des gouvernes est négligée.

Nous faisons ensuite l'hypothèse que nous pouvons dissocier l'effet du Mach de l'effet de la géométrie de l'écoulement au niveau de l'aérodynamique. Ce choix de dissociation peut être vu comme une conséquence d'une hypothèse d'approximation Newtonienne⁵ de l'écoulement hypersonique.

Hypothèse 2.1. La dépendance en Mach des forces aérodynamiques est factorisable.

Un effet factorisable du Mach sur les forces aérodynamiques nous a mené à reconsidérer la façon de traiter la dépendance en Mach, dans le but de permettre une synthèse de commande non-linéaire pour laquelle un unique contrôleur vérifie des propriétés sur tout le domaine d'excursion considéré. Ainsi, comme l'illustre la Figure 2.2, les coefficients de forces varient de façon monotone décroissante avec le Mach, et de façon plutôt régulière dans le domaine considéré. On propose donc de factoriser cet effet en utilisant un coefficient de similitude. On obtient ainsi une expression des forces de la forme

$$F_l = \frac{1}{2}\rho(h)V^2 S_{\text{ref}} S(V) C_l(\alpha, \delta), \quad F_d = \frac{1}{2}\rho(h)V^2 S_{\text{ref}} S(V) C_d(\alpha, \delta), \quad (2.6)$$

où C_l et C_d sont de nouveaux coefficients ne dépendant que de la géométrie de l'écoulement.

Un coefficient de similitude typique pourrait être donné par la règle de Prandtl-Glauert, en posant $S(V) = c|1 - \mathcal{M}^2|^{-1/2}$, où c désigne un coefficient à identifier. Cependant ce modèle n'identifie pas de façon satisfaisante les données de la Figure 2.2. Le modèle donné par $S(V) = (c_0 + c_1 |\mathcal{M}|)^{-1}$, où (c_0, c_1) désigne un couple de coefficients à identifier, s'avère plus représentatif des données observées. Après identification, le facteur de similitude $S(V)$ est décrit dans le domaine hypersonique par la fonction

$$S(V) = \frac{1}{0.3 + 0.13 |\mathcal{M}|}. \quad (2.7)$$

Nous modélisons ensuite les coefficients de façon très classique, avec un modèle de coefficient de portance linéaire et un modèle de coefficient de traînée quadratique :

$$C_l = C_{l_0} + C_{l_\alpha} \alpha + C_{l_\delta} \delta, \quad C_d = C_{d_0} + C_{d_l} C_l(\alpha, \delta)^2. \quad (2.8)$$

Malgré leur simplicité, ces modèles sont représentatifs des données simulées parce que l'excursion de l'incidence α et de l'angle des gouvernes δ est faible en pratique.

5. L'approximation de Newton consiste à dire que le flux amont transmet localement son énergie normalement à la surface de contact. Ainsi la variation de pression locale ne dépend que de la variation de l'orientation locale de la surface de contact. Cette approximation, fautive dans le cas des flux subsoniques, se vérifie à des vitesses hypersoniques.

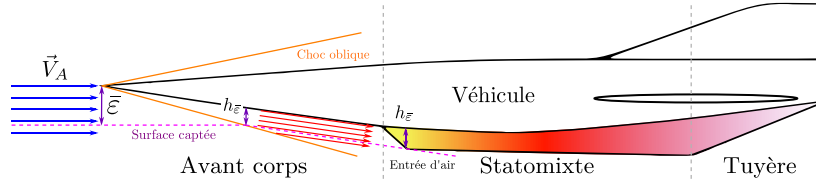


FIGURE 2.5 – Schéma de captation d'une propulsion aérobie. L'intrados comprimant le flux, le débit d'air capté par le moteur dépend de l'angle d'incidence.

2.4.5 Modélisation du moment aérodynamique

Modèle de simulation

De façon très classique, le moment aérodynamique est modélisé via le coefficient aérodynamique présenté à la Figure 2.3, auquel on a ajouté un terme d'amortissement linéaire en q :

$$M_y = \frac{1}{2} \rho(h) V_{\text{Aéro}}^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} \left(C_y(\alpha, \delta, \mathcal{M}) - \frac{l_{\text{ref}}}{V_{\text{Aéro}}} C_{mq} q \right). \quad (2.9)$$

Modèle de comportement

Comme on peut le voir sur la Figure 2.3, le coefficient du moment aérodynamique de tangage est peu dépendant du Mach. Nous modélisons le moment de façon très classique, avec

$$M_m = \frac{1}{2} \rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_m(\alpha, \delta), \quad (2.10)$$

et où le modèle de coefficient C_m est linéaire :

$$C_m(\alpha, \delta) = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta} \delta. \quad (2.11)$$

L'amortissement linéaire en q , de faible amplitude, est négligé.

2.5 Modélisation de la propulsion

Définition 2.5 (Richesse). La richesse Φ_i est le rapport entre le débit massique de carburant commandé Q_c relativement au débit massique d'air Q_a qui circule au travers du moteur et au rapport stœchiométrique de combustion f_s .

Nous proposons de modéliser la propulsion par une approche détaillée des fonctionnalités internes à la propulsion, pour la simulation. Dans la prochaine section, une approche simplifiée sera établie pour le modèle de comportement. Le but, dans ces deux sections, est d'établir une relation entrée/sortie caractérisant la propulsion avec différents niveaux de détail.

Comme le montre la Figure 2.5, le type de véhicule considéré suppose une propulsion de la famille des statoréacteurs, dans une configuration intégrée à l'intrados du véhicule. Ce type de propulsion met en œuvre d'une part des phénomènes très complexes et difficiles à reproduire dans un environnement maîtrisé : par exemple, des écoulements de nature tridimensionnelle, des interactions choc/choc, des décollements de couches limites, l'influence du dégagement de chaleur dans la zone de combustion sur l'entrée d'air, etc.

D'autre part, les phénomènes impliqués sont étroitement liés à la configuration du système propulsif, dont les paramètres de conception varient en fonction de la mission du véhicule. Par exemple, le choix d'une tuyère symétrique ou d'une tuyère SERN⁶ aura des conséquences, non seulement sur les performances, mais aussi sur le comportement de la propulsion. Ces différentes considérations laissent donc supposer une grande variabilité

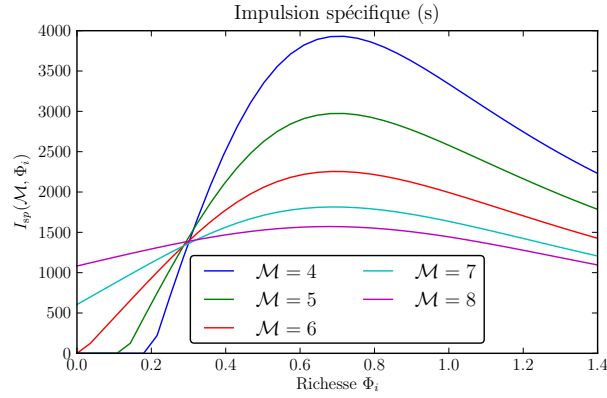


FIGURE 2.6 – Modèle d'impulsion spécifique, en fonction du Mach et de la richesse Φ_i .

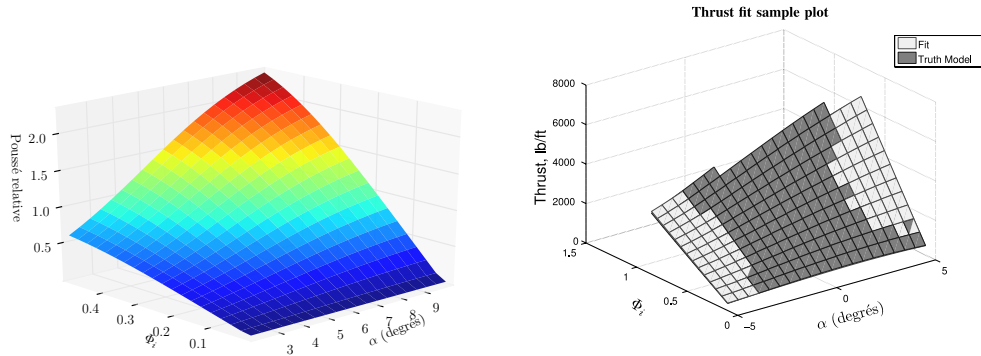


FIGURE 2.7 – Variation relative de la poussée en fonction de l'incidence α et de la richesse Φ_i . À gauche, tendance déduite de notre modèle. À droite, image issue de Parker et al. (2007). L'incidence α et la richesse Φ_i relèvent de conventions différentes dans les deux modèles. Cependant, les deux modèles sont caractérisés par une croissance de $\frac{\partial T}{\partial \Phi_i}$ par rapport à l'incidence α , ce qui est caractéristique du comportement d'une propulsion aérobie hypersonique dans la configuration décrite par la Figure 2.5.

du rôle de la propulsion selon les hypothèses considérées, ce qui nécessite de détailler un minimum de comportements d'un point de vue « interne ».

La poussée est définie par

$$T = g_0 Q_c I_{sp}(\mathcal{M}, \Phi_i), \quad (2.12)$$

où I_{sp} désigne l'impulsion spécifique, décrite par (2.17), Q_c est le débit massique de carburant injecté et Φ_i la richesse du mélange air-carburant. Celle-ci est donnée par

$$\Phi_i = \frac{Q_c}{f_s Q_a} = \frac{Q_c}{\rho V_{Aéro} S_{\bar{\varepsilon}} \bar{\varepsilon}} \quad (2.13)$$

où Q_a désigne le débit massique d'air capté et $\bar{\varepsilon}$ l'efficacité de captation, décrite par (2.14).

La Figure 2.6 illustre l'impulsion spécifique obtenue pour ce type de modélisation, en fonction du Mach et de la richesse. Cette dernière est définie par de nombreux paramètres de vol du fait de la fonction d'entrée d'air.

À notre connaissance, la littérature ne mentionne pas d'autres approches de modélisation interne de ce type de propulsion pour la commande, ni de jeux de données

6. Tuyère asymétrique, de l'anglais *Single Expansion Ramp Nozzle*.

expérimentales permettant de corroborer ou de discuter en détails la pertinence de cette proposition. Toutefois, dans Parker et al. (2007), un certain nombre de données — d'origine totalement indépendante aux nôtres — sont publiées afin d'illustrer une démarche d'identification paramétrique. La Figure 2.7 illustre comment notre modèle mène à des considérations qualitatives parfaitement compatibles avec les données publiées, à un changement près des paramètres de conception.

Pour établir le modèle (2.12), nous distinguerons ici trois sous ensembles au niveau de la propulsion afin de préciser leur rôle : i) l'entrée d'air ; ii) la combustion ; iii) la tuyère. Mais avant cela, précisons les dynamiques considérées.

2.5.1 Dynamique des interactions

Le débit de carburant injecté doit être activement contrôlé pour réguler la richesse du mélange combustible dans le réacteur. De la même façon que la modélisation aérodynamique, nous supposons que l'établissement d'un flux d'air au travers du moteur ainsi que la combustion sont des phénomènes particulièrement rapides en comparaison de la dynamique de pilotage. Typiquement, la longueur de parcours du flux d'air est comprise entre quelques mètres et quelques dizaines de mètres selon la catégorie de véhicule, distance parcourue à plusieurs milliers de mètres par seconde. Les interactions dynamiques⁷ déterminées par le temps de parcours des flux au travers du réacteur ne sont donc pas de nature à interférer avec le pilote.

Aussi, en ce qui concerne le débit de carburant, nous ferons l'hypothèse que la dynamique d'établissement du carburant est instantanée. La validité de cette hypothèse varie, en pratique. En effet, si par exemple le carburant est utilisé pour refroidir la chambre de combustion du réacteur, et que le débit est contrôlé en amont de l'échangeur, des variations et des retards sont à prévoir au niveau de l'injection effective de carburant dans le réacteur. Toutefois, dans la mesure où la propulsion sert pour l'essentiel à contrôler l'énergie du véhicule, et que ceci relève de dynamiques plutôt lentes, il est admissible de supposer qu'un léger retard d'établissement du carburant soit imperceptible du point de vue de la dynamique d'énergie du véhicule. La connaissance nécessaire à l'examen de ce type d'interaction est de surcroît hors de portée de la présente étude.

2.5.2 Modélisation de l'entrée d'air

L'avant corps du véhicule sert à compresser le flux d'air afin de ralentir sa vitesse avant son entrée dans la chambre de combustion. Comme le montre la Figure 2.5, l'intrados du véhicule comprime le flux d'air derrière un choc oblique et une partie de ce flux est captée par l'entrée d'air du réacteur. L'effet de l'entrée d'air dans le modèle (2.12) apparait au travers de Φ_i , puisque par définition $Q_c = \Phi_i f_s Q_a$.

Modélisation du débit massique d'air capté

Le modèle que nous retenons pour le débit massique d'air capté Q_a consiste en le produit de la vitesse de l'écoulement amont par la masse volumique de l'air capté par une surface de captation $S_{\bar{\varepsilon}}$ au travers d'une efficacité de captation notée $\bar{\varepsilon}$, c'est-à-dire $Q_a = \rho V_{\text{Aéro}} S_{\bar{\varepsilon}} \bar{\varepsilon}$. En supposant que le flux d'air derrière le choc oblique est parallèle à la déflexion provoquée par l'intrados du véhicule, cette efficacité de captation est déterminée par un rapport de surfaces dépendant de la géométrie de l'entrée d'air et de l'attitude du véhicule (voir Figure 2.5). L'essentiel du travail de modélisation à ce niveau se résume donc à proposer un modèle pour l'efficacité de captation.

Nous modélisons ensuite l'efficacité de captation d'air comme le produit de trois fonctions. Une fonction $\bar{\varepsilon}_{h_{\bar{\varepsilon}}}$ relative à la variation de l'entrée d'air du réacteur ; une fonction $\bar{\varepsilon}_{\alpha}$ relative à la variation de l'incidence de vol ; et une fonction $\bar{\varepsilon}_{\mathcal{M}}$ relative à la variation de l'efficacité par rapport au Mach.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{h_{\bar{\varepsilon}}}(\mathcal{M}) \bar{\varepsilon}_{\alpha}(\alpha) \bar{\varepsilon}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}), \quad (2.14)$$

7. Typiquement : l'influence de l'effet propulsif sur l'incidence, impliquant une réduction probable du débit d'air.

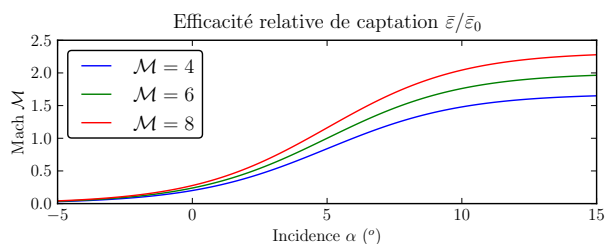


FIGURE 2.8 – Efficacité relative de captation en fonction de l'incidence α et du Mach.

avec $\bar{\varepsilon}_\alpha$ et $\bar{\varepsilon}_M$ respectivement décrites par (2.15), (2.16), et $\bar{\varepsilon}_{h_\varepsilon}$ fixée dans l'Approximation 2.4.

Une illustration du modèle décrit est donnée Figure 2.8. Les paragraphes qui suivent précisent en détails la nature des modèles considérés.

Variation de l'efficacité de captation par rapport à l'incidence. Nous distinguons trois zones de fonctionnement de l'entrée d'air en fonction de l'incidence :

- une zone nominale de fonctionnement, localement autour d'un point nominal de conception. L'efficacité de captation y croît localement avec l'angle d'incidence sous l'effet de la compression du flux amont par l'avant corps.
- Le cas où l'incidence est faible. L'incidence peut être faible au point que l'intrados du véhicule puisse n'être plus directement exposé aux flux hypersonique. La captation d'air est alors nulle.
- Le cas où l'incidence est élevée. Nous pouvons supposer que le volume d'air capté ne s'accroît pas indéfiniment avec l'incidence, du fait de la baisse du rendement des pressions. Ceci suppose donc que le débit d'air capté ne croît pas en proportion de l'incidence. Pour de fortes incidences, un désamorçage de l'entrée d'air est probable⁸, du fait de son inadaptation aux flux. Nous ferons ici l'hypothèse d'une saturation du débit d'air capté pour une valeur d'incidence correspondant au double de la valeur nominale, le comportement restant indéfini au-delà.

Différentes structures de modèle peuvent faire état des trois zones décrites précédemment, qui s'apparentent par exemple à une fonction sigmoïde :

$$\bar{\varepsilon}_\alpha(\alpha) = 2 / \left(1 + e^{k_{\varepsilon_\alpha}(\alpha_0 - \alpha)} \right), \quad (2.15)$$

avec k_{ε_α} un paramètre de sensibilité et α_0 la valeur nominale de fonctionnement de l'entrée d'air. Nous ne définissons pas de modèle en dehors de cette plage d'incidence.

Variation de l'efficacité de captation par rapport au Mach. L'efficacité de captation décroît légèrement en fonction du Mach, du fait de la fermeture de l'angle de choc, et du rendement des pressions. À partir de données expérimentales, il apparaît qu'une telle variation est décrite en bonne approximation par une fonction affine :

$$\bar{\varepsilon}_M(\mathcal{M}) = 1 + k_{\varepsilon_M}(\mathcal{M} - \mathcal{M}_0), \quad (2.16)$$

avec k_{ε_M} un paramètre de sensibilité et \mathcal{M}_0 la valeur nominale de fonctionnement de l'entrée d'air.

Variation de l'entrée d'air du réacteur. Selon la configuration retenue, il est possible que l'entrée d'air du réacteur soit variable, par exemple afin de l'adapter au Mach de croisière. Un simple paramètre variable $\bar{\varepsilon}_{h_\varepsilon}$ peut rendre compte d'une telle fonctionnalité.

8. De manière générale, il est difficile de prévoir le comportement du véhicule en cas de trop grandes prises d'incidences. Il s'avère cependant qu'elles sont dangereuses pour la sécurité du véhicule, étant données les contraintes mécaniques ou thermique qu'elles entraînent. Elles pourraient également exposer l'entrée d'air directement au flux hypersonique.

Dans notre cas de figure, nous ferons l'hypothèse que la hauteur de l'entrée d'air augmente avec le Mach afin de conserver une poussée maximale constante dans la plage de fonctionnement du véhicule. Nous précisons dans l'Approximation 2.4 la loi de variation proposée pour ce vecteur de commande.

Remarques complémentaires.

Remarque 2.2. Les phénomènes décrits ci-avant ne sont pas découplés entre eux : l'angle du choc oblique sous l'intrados du véhicule dépend du Mach et de l'incidence de l'écoulement ; l'incidence, la vitesse et l'altitude du véhicule sont liées par la nécessité d'équilibrer le vol ; quant à la surface de l'entrée du réacteur, celle-ci peut être variable ou non selon la configuration de réacteur choisie.

Remarque 2.3. L'entrée d'air est particulièrement sensible au dérapage. Dès le premier degré de dérapage, on peut attendre une dégradation significative des performances de l'entrée d'air, et donc de la propulsion. Par conséquent, le véhicule devra voler sans prise de dérapage, avec des manœuvres en virage incliné.

Remarque 2.4. Le débit d'air traversant la chambre de combustion n'est pas l'unique effet imputable à l'entrée d'air. En pratique, le flux d'air circulant au travers du réacteur n'est pas homogène. Il y a une stratification des écoulements sur différentes zones de pression à l'intérieur du réacteur, pouvant être accentuée par prise d'incidence ou prise de dérapage. Ceci peut se traduire par deux effets principaux : i) une combustion imparfaite, avec des régions trop riches et des régions trop pauvres ; ii) une modification de la direction et du point d'application de la résultante des efforts de poussée, du fait de la distribution des pressions.

2.5.3 Modélisation des effets de combustion

Le caractère fortement dimensionnant de l'impulsion spécifique (I_{sp}) en fait un paramètre dont la maximisation est très convoitée par les concepteurs de véhicules. En conséquence, l'impulsion spécifique des différents concepts de statoréacteurs est relativement stable malgré différents choix stratégiques possibles concernant la propulsion. Ceci en fait un paramètre approprié pour une modélisation générique.

La démarche que nous retenons consiste à retenir deux facteurs, de sorte que

$$I_{sp}(\mathcal{M}, \Phi_i) = \bar{I}_{sp}^{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) \bar{I}_{sp}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i). \quad (2.17)$$

Le premier facteur $\bar{I}_{sp}^{\mathcal{M}}$, dépend du Mach reflétant l'efficacité de la *poussée* — c'est-à-dire l'impulsion spécifique maximale atteignable par la propulsion. Le second facteur $\bar{I}_{sp}^{\Phi_i}$, dépend du Mach et de la richesse reflétant l'efficacité relative de la *combustion* — facteur empiriquement défini par le rapport entre l'impulsion spécifique maximale atteignable par la propulsion et celle réalisée au niveau de richesse considéré.

Modélisation de l'efficacité de la poussée

À richesse constante, et en supposant une homogénéité constante des flux au sein du réacteur, de nombreux facteurs vont déterminer la valeur de la poussée. Notamment : la traînée induite par l'entrée d'air, la traînée interne au réacteur, l'énergie des flux considérés, l'inadaptation de la tuyère en dehors du Mach de croisière, la durée de circulation du mélange air-carburant dans le réacteur, etc. Pour beaucoup, ces paramètres sont dominés par le Mach de croisière du véhicule et nous pouvons réduire leur influence à une valeur d'impulsion spécifique.

Une illustration de valeurs typiques d'impulsion spécifique en fonction du Mach est donnée Figure 2.9, pour un statomixte alimenté en dihydrogène.

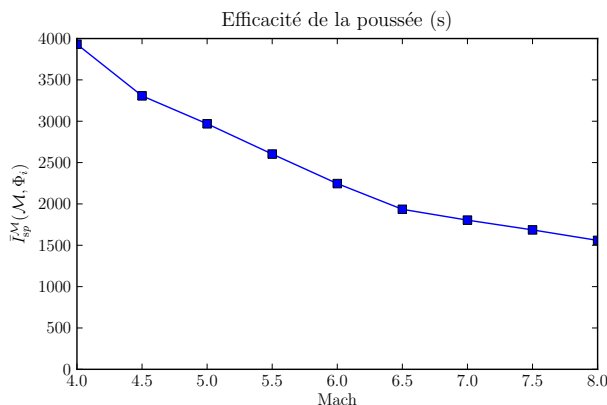


FIGURE 2.9 – Impulsion spécifique maximale d'un statomixte typique en fonction du Mach (Source : Onera). Ce graphe décrit une fonction $\bar{I}_{sp}^M(\mathcal{M})$ et représente une coupe de la Figure 2.6. La transition subsonique/supersonique de la combustion au sein du réacteur est visible dans cet exemple entre Mach 6 et Mach 6,5.

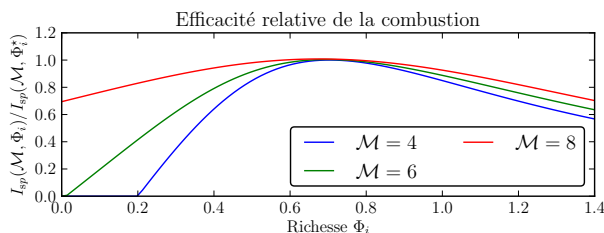


FIGURE 2.10 – Efficacité de la combustion en fonction de la richesse et du Mach (source : Onera).

Modélisation de l'efficacité relative de la combustion

Par définition, $Q_c = \Phi_i f_s Q_a$. Notons que la composition de l'atmosphère étant très homogène dans la stratosphère, le rapport f_s peut être considéré invariable dans les conditions de vol⁹.

Toutes choses égales par ailleurs, la qualité de la combustion va dépendre de la richesse et du Mach dans la chambre, donc du Mach de croisière. En effet, concernant la richesse, lorsque peu de carburant est injecté (richesse très inférieure à 1) l'oxygène disponible dans le mélange permet que tout le carburant soit brûlé. Si nous augmentons la richesse, il existe un seuil au delà duquel une partie du carburant sera inévitablement non brûlée si le carburant est en excès pour la combustion ; et ce seuil est potentiellement inférieur à 1 puisque les mélanges ne sont pas nécessairement homogènes dans le réacteur. Une richesse trop élevée peut également noyer le moteur.

En ce qui concerne le Mach de croisière, son influence sur la combustion est surtout notable à faible richesse. En effet, pour des valeurs de Mach plus faibles que le point de croisière nominal du statomixte, nous pouvons difficilement savoir si le flux d'air dispose d'assez d'énergie pour s'autoinflammer. Il existe donc toute une zone dans l'étendue des possibles couples (richesse, Mach) au sein de laquelle la combustion peut être nulle ou très instable. Pour des valeurs de Mach suffisamment élevées, la combustion devient plus probable, même à faible richesse, en raison de la température génératrice de l'écoulement.

Une illustration de ces phénomènes est donné par la Figure 2.10, décrivant un exemple de relation $\bar{I}_{sp}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$.

9. Au dessous d'une altitude d'environ 100 km, l'atmosphère terrestre possède une composition quasi uniforme, exception faite des masses de vapeur d'eau. Ceci constitue l'*homosphère*.

2.5.4 Remarques complémentaires à propos de la propulsion

Modélisation des effets de tuyère

La conception du véhicule peut être faite en considérant l'utilisation d'une tuyère asymétrique. Ceci implique que la direction de la propulsion n'est généralement pas alignée avec l'axe longitudinal du véhicule, et qu'elle crée un moment faisant piquer le véhicule. Par ailleurs, cette direction dont l'ordre de grandeur est de quelques degrés est susceptible d'évoluer légèrement, notamment en fonction du Mach, de l'incidence et de la richesse.

Nous considérons dans notre modèle un désalignement φ_f constant de 4° . Par ailleurs, le point d'application considéré est placé à 0,30 m au dessous et 1,5 m en arrière du centre de masse. Le levier considéré est alors $l_T(\varphi_f) = z_T \cos \varphi_f - x_T \sin \varphi_f$, où x_T et z_T sont les coordonnées du point d'application de la poussée.

Désamorçage d'entrée d'air

Nous savons que le superstatoréacteur possède un dégagement de chaleur maximal au delà duquel la combustion peut générer une obstruction, dite « obstruction thermique », pouvant provoquer un blocage de l'écoulement amont. Dans ce cas, l'air ne pénètre plus dans le moteur : l'entrée d'air se désamorce. Ce désamorçage est provoqué par la remontée des chocs internes à la propulsion sous l'élévation de la pression en aval.

Les effets à en attendre sur le comportement du véhicule du point de vue du pilotage sont multiples. D'une part on peut supposer une augmentation significative de la pression d'entrée d'air, de sorte que le véhicule cabre¹⁰ sous l'augmentation subie de portance centrée sur l'avant. D'autre part, on peut attendre une augmentation de la portance et la trainée, provoquant une impulsion forte sur la dynamique longitudinale du véhicule. Par ailleurs, des travaux tels que Bolender et al. (2009) avancent une réduction significative de la contrôlabilité ainsi qu'une réduction (voire une inversion locale) de la marge de stabilité de la dynamique de rotation. La sous-section 3.7.6 précise un scénario de désamorçage avec des variations paramétriques adaptées pour mettre en évidence des conséquences possibles à attendre sur le comportement du véhicule commandé.

2.6 Modélisation de la propulsion : approche simplifiée

2.6.1 Valeur de la poussée

L'intégration de la propulsion au corps du véhicule, illustrée par la Figure 2.5, implique de forts couplages entre propulsion, Mach et incidence. Ces couplages, notamment représentés dans les Figures 2.6 et 2.7, impliquent la nécessité de tenir compte du fonctionnement de la propulsion au niveau du contrôleur. Pour ce faire, nous établissons un modèle de comportement à partir des trois observations :

Entrée d'air : L'état du véhicule influe sur le débit d'air capté.

Combustion : La poussée dépend directement de la quantité de carburant injecté, et de la qualité de la combustion (richesse).

Efficacité : La vitesse du véhicule influe sur le rendement de la poussée.

Les différentes caractéristiques sont considérées statiques, étant donnée la rapidité des phénomènes en jeu (écoulements hypersoniques, combustion supersonique) comparé à l'évolution du véhicule. L'influence du débit de carburant sur la poussée étant fortement non linéaire, nous recherchons une variable mieux adaptée pour la commande de l'engin. Il faut cependant que celle-ci soit fidèle à la connaissance acquise au niveau de la motorisation. Dans notre travail, la variable de commande considérée sera le ratio entre poussée commandée et poussée disponible, que nous notons η .

¹⁰. Cela dépend de la position relative du centre de masse par rapport à l'avant corps du véhicule. Dans cette étude, nous supposons ce dernier positionné en retrait de l'avant corps.

Pour justifier ce choix, rappelons que d'après (2.13), nous avons

$$Q_c = \Phi_i f_s Q_a = \Phi_i f_s \rho(h) V S_{\bar{\varepsilon}} \bar{\varepsilon}(\alpha, \mathcal{M}). \quad (2.18)$$

En combinant avec (2.12), nous obtenons

$$T = g_0 f_s \rho(h) S_{\bar{\varepsilon}} \bar{\varepsilon}(\alpha, \mathcal{M}) V \Phi_i I_{\text{sp}}(\mathcal{M}, \Phi_i). \quad (2.19)$$

En supposant que l'impulsion spécifique peut se factoriser comme un produit¹¹ de deux fonctions $I_{\text{sp}}^{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ et $I_{\text{sp}}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$.

Alors, on peut faire l'hypothèse que la propulsion est généralement conçue de façon à ce que le produit $\bar{\varepsilon}(\alpha_0, \mathcal{M}) V I_{\text{sp}}^{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ soit relativement constant pour chaque valeur de α_0 . Cette hypothèse se matérialise par une loi de variation pour $h_{\bar{\varepsilon}}(\mathcal{M})$.

Approximation 2.4. La fonction $h_{\bar{\varepsilon}}(\mathcal{M})$ est proportionnelle¹² à l'inverse de la caractéristique $\bar{\varepsilon}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) V I_{\text{sp}}^{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$.

En conséquence de l'Approximation 2.4, le modèle de poussée se résume à

$$T = \rho(h) \varepsilon(\alpha) \eta, \quad \eta \in [0 ; 1], \quad (2.20)$$

où η proportionnelle à $\Phi_i I_{\text{sp}}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$ est une caractéristique du moteur, supposée localement inversible, et

$$\varepsilon(\alpha) = g_0 f_s \frac{\bar{\varepsilon}(\alpha, \mathcal{M})}{\bar{\varepsilon}(\alpha_0, \mathcal{M})}. \quad (2.21)$$

De cette façon, la fonction $\rho(h) \varepsilon(\alpha)$ définit en fait la *poussée maximale disponible* dans une configuration donnée du véhicule, qui dépend donc essentiellement de l'incidence et de la masse volumique de l'atmosphère.

Remarque 2.5. L'expression (2.20) fournit un modèle relativement succinct pour le comportement de la propulsion. Toutefois, le changement de variable proposé a d'autres qualités. D'une part, il s'avère que le produit $\Phi_i I_{\text{sp}}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$ est une caractéristique plus régulière et moins variable que la caractéristique $I_{\text{sp}}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$. En effet, le produit par la richesse injectée régularise la caractéristique pour les faibles valeurs de Φ_i , or c'est ce domaine qui est le plus sujet à dispersion. Ceci relativise l'influence de l'hypothèse de séparation entre les effets de la combustion et l'efficacité du moteur faite ci-avant (voir la note 11).

Remarque 2.6. À partir du modèle de connaissance développé, la caractéristique (2.20) s'avère être une fonction continue, nulle à l'origine et passant par une valeur maximum. Le domaine d'opération normal du moteur est dans cette plage monotone croissante, et la valeur de la poussée peut ainsi être facilement limitée pour éviter des risques de désamorçage d'entrée d'air, évoqués à la fin de la section précédente. La Figure 2.11 montre la dispersion de la caractéristique $\Phi_i I_{\text{sp}}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$ en fonction des valeurs de Mach, réalisée à partir des caractéristiques décrites dans la Figure 2.10.

Remarque 2.7. Choisir η comme la variable de commande suppose une certaine connaissance du flux d'air passant dans la propulsion, ainsi qu'une description appropriée de la caractéristique $\Phi_i I_{\text{sp}}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$. En ce qui concerne cette dernière, on peut supposer qu'elle est accessible au travers des essais de propulsion réalisés au sol durant la conception du véhicule. Quant au flux d'air passant dans la propulsion, nous sommes réduits soit à faire l'hypothèse que nous pourrions le prédire avec suffisamment de précision, soit imposer sa mesure physique en temps réel. Ce sont des contraintes qui dépendent de la maîtrise de nombreux procédés au moment de la fabrication de l'engin.

11. Il s'agit de supposer les effets de la combustion (fonction de la richesse et du Mach) et de l'efficacité du moteur (fonction du Mach) comme des phénomènes indépendants. Voir la Section 2.5.

12. En pratique, cette variation est possible sur un domaine donné jusqu'à saturation de $h_{\bar{\varepsilon}}(\mathcal{M})$. Au delà de ce domaine, par exemple pour un Mach très élevé, l'adaptation ne permet plus de maintenir les performances de la propulsion.

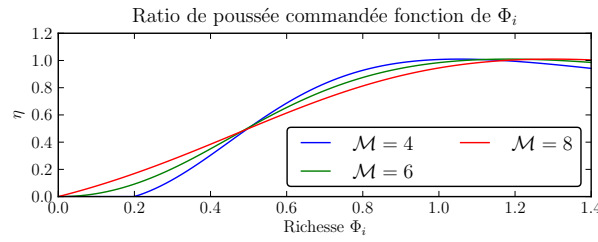


FIGURE 2.11 – Dispersion supposée typique de la caractéristique $\Phi_i I_{sp}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$.

2.6.2 Direction de la poussée

Pour la synthèse de commande, nous ferons l'hypothèse que notre poussée est colinéaire au vecteur vitesse du véhicule et que la poussée n'exerce pas d'influence significative sur l'attitude de l'engin. L'absence de prise en compte d'une contribution de la poussée à la portance est motivée par le fait que, en croisière stabilisée, la traînée est significativement petite par rapport à la portance. En effet, au cours d'un palier stabilisé, on vérifie que la contribution à la portance de la propulsion est

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{z}_e = \frac{1}{f} F_z \sin(\alpha + \varphi_f), \quad (2.22)$$

avec f la finesse, typiquement entre 3 et 4 pour ce type de véhicule, et α et φ_f typiquement de quelques degrés. La poussée ayant pour rôle principal de compenser la traînée, et cette dernière étant significativement plus faible que la portance, la contribution à la portance d'une éventuelle poussée désaxée est négligeable, inférieure à 5% de la portance.

Par ailleurs, les forces impliquées par une aérodynamique hypersonique sont telles que la contribution à l'équilibre des moments d'une éventuelle poussée désaxée est relativement faible, et largement dominée par un modeste débattement de gouvernes. Typiquement, dans des pires cas, une variation totale de propulsion est compensée par une variation de gouvernes inférieure à 1° .

Approximation 2.5. Le véhicule est supposé suffisamment fin pour que la résultante de la poussée puisse être considérée colinéaire au vecteur vitesse du véhicule et appliquée sur le centre de masse.

De la sorte, en matière d'interactions propulsion/aérodynamique, nous considérerons donc dans le modèle de comportement des effets de l'attitude aérodynamique sur la propulsion, mais nous négligerons les effets de la propulsion sur le comportement aérodynamique. Rappelons par ailleurs que nous avons fait une hypothèse d'indépendance entre l'écoulement de la propulsion et l'écoulement aérodynamique au moment de la modélisation de connaissance.

2.7 Modélisation de l'environnement

2.7.1 Formalisme de terre plate

Modèle de simulation

Nous travaillons avec des coordonnées cartésiennes avec un formalisme de terre plate. Ce formalisme nous permet d'obtenir un modèle dynamique similaire à celui des avions. Toutefois nous prenons en compte dans le modèle l'accélération de Coriolis induite par la courbure de la trajectoire sur le globe terrestre. Celle-ci est alors assimilée à une variation locale de la gravitation, ce qui nous amènera à distinguer la gravitation g_0 mesurée à la surface de la terre de la gravitation g ressentie le long de la trajectoire du véhicule.

Par ailleurs, la décroissance de la gravitation en fonction de l'altitude est supposée nulle.

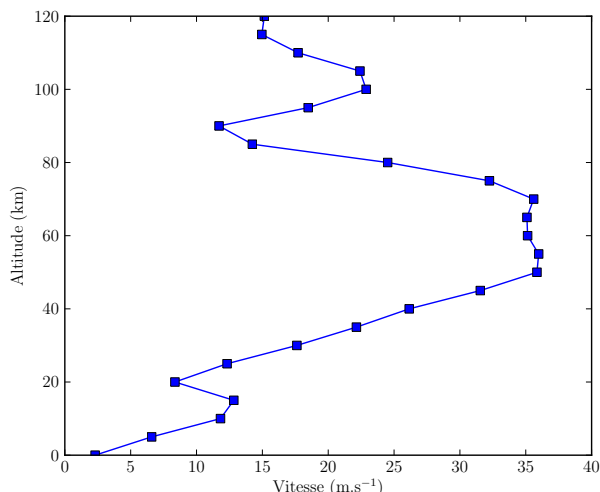


FIGURE 2.12 – Vent horizontaux moyens dans l'atmosphère.

La gravitation ressentie le long de la trajectoire s'exprime donc comme :

$$g(V) = g_0 - \frac{V^2 \cos^2 \gamma}{R_t + h}. \quad (2.23)$$

Modèle de comportement

Pour la synthèse de commande, nous supposons la gravité indépendante de l'altitude, et nous faisons l'hypothèse d'un vol en palier stabilisé, donc principalement horizontal.

Approximation 2.6. La variation de la gravité en fonction de l'altitude est négligée.

Approximation 2.7. L'influence de la pente de vitesse sur la gravitation ressentie à bord du véhicule est nulle. C'est-à-dire $\cos^2 \gamma \approx 1$ au cours du vol.

Nous obtenons ainsi le modèle :

$$g(V) = g_0 - \frac{V^2}{R_t}. \quad (2.24)$$

2.7.2 Perturbations aérologiques

Vents stratosphériques

Les vols des HSV sont généralement effectués dans la stratosphère, entre 20 km et 40 km d'altitude, afin que la pression dynamique¹³ à laquelle est soumis le véhicule ne soit pas trop élevée. La nature des composantes horizontales des vents dans la stratosphère est relativement bien connue tout autour du globe, en particulier parce que dans le cas d'un vol vertical tel que celui d'une fusée ou d'un missile, la question du vent horizontal est de première importance pour le dimensionnement des actionneurs. Un exemple de profil de vent est donné Figure 2.12.

En revanche, la connaissance des composantes verticales des vents de la stratosphère est moins bien connue, alors qu'elle est de première importance dans le cas d'un vol de croisière hypersonique.

En pratique, il s'avère que l'effet relatif du vent sur la vitesse longitudinale des vols hypersoniques est de l'ordre du pourcent, ce qui est très faible. En revanche, une rafale latérale peut aisément provoquer un dérapage de l'ordre du degré, impliquant une dégradation notable du fonctionnement de l'entrée d'air, donc du facteur de propulsion.

13. Définie par $\frac{1}{2}\rho(h)V_{Aéro}^2$.

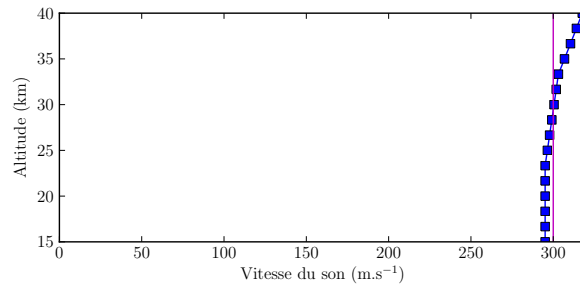


FIGURE 2.13 – Vitesse du son dans l’atmosphère en fonction de l’altitude. La courbe magenta représente le modèle constant.

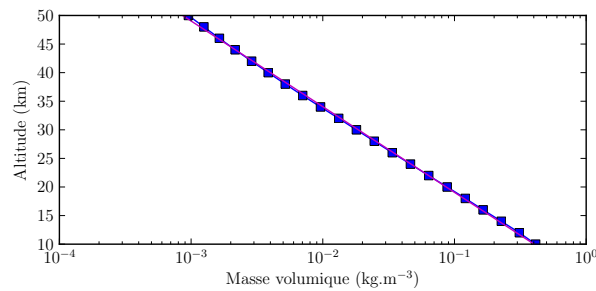


FIGURE 2.14 – Masse volumique de l’atmosphère en fonction de l’altitude. La courbe magenta représente le modèle exponentiel.

Rafales et perturbations

De fait, la stratosphère est une couche de l’atmosphère naturellement stable du fait de l’inversion du gradient thermique : il n’y a pas de turbulence d’origine thermique. Cependant il existe dans la stratosphère des ondes d’origine orographique qui peuvent générer des perturbations conséquentes, avec des vortex induisant des vents ayant des composantes verticales de l’ordre de 10 m.s^{-1} .

Pour rendre compte de ces phénomènes, il est possible d’utiliser différents modèles selon le but recherché. Par exemple, une génération de bruit déterminée par densité spectrale (type *Dryden*), où bien des modèles de rafales discrètes schématisant un vortex. De précieuses données pour y parvenir sont disponibles dans Ehernberger (1992) ainsi que dans Johnson (2008).

2.7.3 Vitesse du son

La vitesse du son est relativement constante dans la portion de stratosphère qui nous intéresse, entre 20 km et 40 km d’altitude. Nous reproduisons dans la Figure 2.13 les données fournies dans George et al. (1969).

2.7.4 Densité de l’atmosphère

La masse volumique moyenne de l’atmosphère dépend de la pression et de la température de l’air, fonctions de l’altitude. Des tables et modèles de calculs provenant de George et al. (1969) permettent d’établir la courbe donnée à la Figure 2.14. On note que le logarithme de la masse volumique est proche d’une fonction affine dans la portion de stratosphère qui nous intéresse, entre 20 km et 40 km d’altitude.

Nous proposons donc le modèle exponentiel suivant :

$$\rho(h) = e^{-ah+b}, \quad (2.25)$$

avec $a = 1,5363 \cdot 10^{-4}$ et $b = 0,62556$.

2.7.5 Modélisation de l'environnement pour la simulation

Dans le but de soumettre notre véhicule à des perturbations non structurées et non constantes, nous implantons un modèle de vent de type rafale. Celui-ci est relativement simple. Il s'agit d'un tirage aléatoire effectué à chaque seconde, suivant une loi normale centrée et dont l'écart type reprend les valeurs de la Figure 2.12. Une interpolation linéaire est effectuée au cours du temps entre les différents tirages. Nous définissons alors

$$V_{\text{Aéro}} = V + V_{\text{Vent}}. \quad (2.26)$$

En ce qui concerne la vitesse du son dans l'atmosphère, elle est interpolée suivant la table décrite par la Figure 2.13.

Quant à la masse volumique d'atmosphère, elle est modélisée par (2.25).

2.7.6 Modélisation de l'environnement pour la commande

Nous ferons l'hypothèse que le véhicule évolue dans un environnement non perturbé. Nous supposons par ailleurs que le véhicule évolue dans un domaine d'altitude où la vitesse du son est considérée constante et la masse volumique de l'air est définie par (2.25). Par conséquent, nous faisons l'approximation $V = 300\mathcal{M}$, où \mathcal{M} est le nombre de Mach.

Approximation 2.8. Le véhicule évolue dans une atmosphère non perturbée. La vitesse du son est supposée constante à 300 ms^{-1} .

2.8 Modélisation des masses

2.8.1 Remarques préalables

Remarque 2.8. Nous supposons des vols d'amplitude et de durée telles qu'elles permettent en bonne approximation d'utiliser les lois de la mécanique Newtonienne dans le référentiel terrestre supposé Galiléen.

Remarque 2.9. Le véhicule est assimilé à un solide indéformable. En effet, si des déformations de structure sont attendues au cours du vol, elles ont pour conséquence principale de complexifier les interactions fluide/structure. Il y a donc des conséquences à attendre des déformations de structure au niveau de l'aérodynamique, mais elles ne sont pas de nature à remettre en cause la dynamique globale du véhicule et, pour ce qui nous concerne, l'application des lois de Newton.

Remarque 2.10. Nous faisons de plus l'hypothèse d'une certaine stabilité de la répartition des masses du véhicule au cours du vol. En effet, les conséquences physiques d'un ballotement d'ergols pourraient remettre en cause, non seulement la stabilité de la répartition des masses au sein du véhicule, mais aussi l'hypothèse fondamentale que nous sommes en présence d'un solide indéformable. Cependant, il est possible par conception d'éviter qu'un ballotement d'ergols se révèle suffisamment important pour nécessiter sa prise en compte par la commande du véhicule, par exemple en cloisonnant ou segmentant les réservoirs. Nous faisons donc ces hypothèses de conception sur la stabilité de la répartition des masses du véhicule.

Remarque 2.11. Les masses constituant le véhicule évoluent au cours du vol du fait de la consommation de carburant. C'est donc également le cas de la masse et du centre de masse du véhicule. La conception du véhicule peut cependant être contrainte en terme de préservation de la position du centre de masse au cours du vol.

2.8.2 Modèle de simulation pour la variation des masses

La masse du véhicule est composée de la masse sèche et de la masse d'ergols :

$$m = m_s + m_e, \quad (2.27)$$

toutes deux réparties autour du même centre de masse. Cette masse induit un moment d'inertie, donné par

$$J = j_s m_s + j_e m_e. \quad (2.28)$$

L'évolution de la masse au cours du vol est une conséquence de la consommation de carburant. Sa dynamique est modélisée par

$$\dot{m} = \dot{m}_e = -Q_c. \quad (2.29)$$

2.8.3 Modèle de comportement pour la variation des masses

Dans le cadre des HSV, du fait que l'impulsion spécifique de ces véhicules est relativement¹⁴ élevée par rapport à celle de propulsions fusées, la variation de masse au cours du temps peut être considérée suffisamment lente relativement aux dynamiques d'attitude ou d'altitude pour être négligée.

Pour fournir un ordre de grandeur, en palier stabilisé, un véhicule avec une finesse de 4 et une impulsion spécifique de 2000 s volerait 80 s avant de consommer 1% de sa masse totale.

Approximation 2.9. Le véhicule est supposé suffisamment fin et équipé d'une propulsion suffisamment efficace pour que la masse et la distribution des masses du véhicule puissent être supposées constantes le long de la trajectoire commandée.

Remarque 2.12. Cette simplification n'est cependant pas sans conséquence sur la dynamique d'énergie du véhicule. Ainsi, même si le véhicule est stabilisé en attitude, la trajectoire commandée peut se révéler inatteignable faute d'adéquation entre la configuration du véhicule (masse sèche, masse d'ergols, poussée disponible, etc.) et la trajectoire demandée. Toutefois, la planification de mission pour un véhicule donné sort du cadre de nos travaux, qui se concentrent sur la seule stabilisation du véhicule. Et de ce point de vue, les variations des masses le long de la trajectoire peuvent être considérées négligeables.

2.9 Application de la mécanique Newtonnienne

2.9.1 Orientation et dynamique d'un solide volant, en repère Galiléen

Considérons un véhicule solide, dont le vecteur vitesse \mathbf{V} est porté par le vecteur unitaire \mathbf{x}_A dont l'orientation dans le repère inertiel est défini par les angles (γ, χ, μ) . On considère donc les coordonnées du vecteur vitesse comme le résultat d'une série d'orientations successives, chacune dans leur repère respectif : orientations en cap χ , en pente γ ainsi qu'en roulis aérodynamique μ . Ces transformations sont illustrées Figure 2.15.

Définissons la matrice d'orientation $\mathbf{R}_{0 \rightarrow A} = \mathbf{R}_{(\mathbf{x}, \mu)} \mathbf{R}_{(\mathbf{y}, \gamma)} \mathbf{R}_{(\mathbf{z}, \chi)}$, avec les matrices

14. Avec un facteur 5, pour un carburant hydrogène.

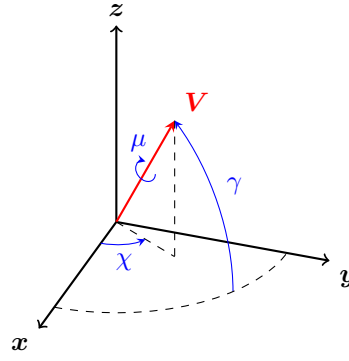


FIGURE 2.15 – Vecteur vitesse \mathbf{V} , cap χ , pente γ et roulis aérodynamique μ , représentés dans le repère inertiel.

de rotation définies comme suit :

$$\mathbf{R}_{(x,\mu)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu & -\sin \mu \\ 0 & \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{R}_{(x,\mu)}}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \mu & -\cos \mu \\ 0 & \cos \mu & -\sin \mu \end{pmatrix} \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{R}_{(y,\gamma)} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{R}_{(y,\gamma)}}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \end{pmatrix} \quad (2.30b)$$

$$\mathbf{R}_{(z,\chi)} = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{R}_{(z,\chi)}}{\partial \chi} = \begin{pmatrix} -\sin \chi & -\cos \chi & 0 \\ \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30c)$$

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire

$$\widehat{m(\mathbf{R}_{0 \rightarrow A})^\top \mathbf{V}} = (\mathbf{R}_{0 \rightarrow A})^\top \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}}, \quad (2.31)$$

où $\Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}}$ désigne la somme des effort en repère aérodynamique. Sachant que la dérivation du vecteur vitesse projeté dans le repère inertiel s'écrit

$$\begin{aligned} \widehat{(\mathbf{R}_{0 \rightarrow A})^\top \mathbf{V}} &= (\mathbf{R}_{0 \rightarrow A})^\top (m \dot{\mathbf{V}} + \dot{m} \mathbf{V}) + m \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{(x,\mu)}}{\partial \mu} \mathbf{R}_{(y,\gamma)} \mathbf{R}_{(z,\chi)} \right]^\top \mathbf{V} \dot{\mu} \\ &\quad + m \left[\mathbf{R}_{(x,\mu)} \frac{\partial \mathbf{R}_{(y,\gamma)}}{\partial \gamma} \mathbf{R}_{(z,\chi)} \right]^\top \mathbf{V} \dot{\gamma} \\ &\quad + m \left[\mathbf{R}_{(x,\mu)} \mathbf{R}_{(y,\gamma)} \frac{\partial \mathbf{R}_{(z,\chi)}}{\partial \chi} \right]^\top \mathbf{V} \dot{\chi}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

on peut alors développer et multiplier l'équation à gauche par la matrice $\mathbf{R}_{0 \rightarrow A}$ afin d'obtenir des simplifications. Il en résulte :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{V} + \frac{\dot{m}}{m} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\mu} V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\gamma} V \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \mu \\ \cos \mu \end{pmatrix} + \dot{\chi} V \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \mu \cos \gamma \\ -\sin \mu \cos \gamma \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{m} \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} - g(V) \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ -\sin \mu \cos \gamma \\ \cos \mu \cos \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

La dynamique $\dot{\mu}$ du roulis aérodynamique n'a pas d'effet sur les efforts en jeu, ce qui est logique puisque μ quantifie une rotation propre du vecteur vitesse.

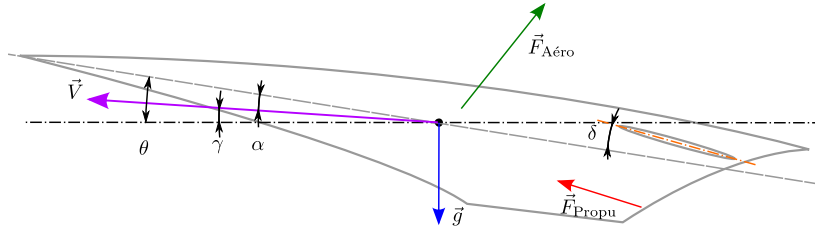


FIGURE 2.16 – Bilan des forces appliquées au véhicule.

À partir de (2.33), on obtient directement l'équation dynamique de la vitesse. La dynamique de cap et de pente se déduit de

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \cos \gamma \end{pmatrix} = -\frac{1}{V} \begin{pmatrix} \sin \mu & \cos \mu \\ -\cos \mu & \sin \mu \end{pmatrix}^{\top} \left[\frac{1}{m} \begin{pmatrix} \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aéro}} \cdot \mathbf{x}_A \\ \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aéro}} \cdot \mathbf{z}_A \end{pmatrix} - g(V) \begin{pmatrix} -\sin \mu \cos \gamma \\ \cos \mu \cos \gamma \end{pmatrix} \right], \quad (2.34)$$

2.9.2 Restriction à un vol dans le plan vertical de symétrie

À l'issue de la modélisation des efforts appliqués au véhicule, il reste à en faire la synthèse. La Figure 2.16 montre le bilan des forces aérodynamiques, des forces de gravité et de la propulsion appliquées au véhicule.

En posant $\mu = 0$, nous obtenons l'expression de la dynamique de vitesse (V, γ) du centre de masse du véhicule. Ensuite, dans la mesure où la dynamique est restreinte dans le plan vertical ($O, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0$), la dynamique de rotation est triviale.

Modèle de simulation

Le modèle dynamique du véhicule défini dans le plan vertical est le système (2.3) exposé à la Section 2.3, page 13. Il est composé de l'agrégation du modèle dynamique du centre de masse (2.3a-2.3c), auquel on adjoint la dynamique de rotation (2.3d-2.3e) ainsi que la dynamique de masse (2.3h) et enfin la dynamique d'actionneur (2.3f-2.3g).

Modèle de comportement

Le modèle dynamique du comportement du véhicule est défini par

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (2.35a)$$

$$m\dot{V} = T(\alpha, h, \eta) - F_d(h, V, \alpha, \delta) - mg(V) \sin \gamma, \quad (2.35b)$$

$$mV\dot{\gamma} = F_l(h, V, \alpha, \delta) - mg(V) \cos \gamma, \quad (2.35c)$$

$$\dot{\theta} = q, \quad (2.35d)$$

$$J\dot{q} = M_m(h, V, \alpha, \delta), \quad (2.35e)$$

avec F_l et F_d définies par (2.6) et g, T et M_m respectivement définis par (2.24), (2.20) et (2.10).

Ce modèle diffère de modèles plus classiques d'avions ou de missiles sur deux points. D'une part la poussée n'est pas une variable d'entrée, mais une fonction non linéaire de l'état. D'autre part les forces aérodynamiques dépendent significativement de l'angle des gouvernes. Dans une perspective de commande, une telle particularité est connue pour introduire une dynamique inverse instable pour certains choix de variables à contrôler, ce qui est une obstruction forte pour la réalisation de certaines lois de commande. Voir par exemple les travaux de Sigthorsson et al. (2008), de Wang et Stengel (2000) et le commentaire de Menon (2001) à ce sujet.

La section qui suit a notamment pour objet de composer avec ces spécificités.

2.10 Établissement du modèle de comportement

2.10.1 Choix des variables contrôlées

En raison des effets cités de forces directes, le modèle du véhicule décrit par (2.35) n'est pas encore facilement contrôlable. Si notre objectif est de contrôler la sortie (h, V) du véhicule en utilisant le couple (η, δ) , il est préférable de faire apparaître la hiérarchie de commande via une structure triangulaire. Les paragraphes qui suivent sont dédiés à étudier le modèle et en dériver une version adaptée pour la commande.

Plusieurs méthodes sont possibles pour mettre le modèle sous forme triangulaire, nous avons notamment proposé une approche de contrôle hiérarchique dans Poulain et al. (2010). Toutefois cette méthode est critiquable sur deux points. D'une part, s'appuyant sur le théorème de Tikhonov¹⁵, elle donne un résultat local sous des conditions difficiles à évaluer. D'autre part, elle exploite une constatation empirique de séparation d'échelle de temps pour contourner la difficulté liée aux effets de forces directes, mais sans rendre compte de la réalité du phénomène en œuvre.

Nous développons ici une redéfinition de la sortie développée dans Poulain et al. (2009). Ce type de reformulation du problème de commande est assez courant, mais n'avait pas été proposée dans les travaux existants au sujet de la commande des HSV. Dans le domaine aéronautique, Shkolnikov et Shtessel (2001) donne un exemple de redéfinition de sortie appliquée à un avion de chasse, dans un contexte linéaire.

L'idée générale de cette démarche provient du fait qu'il est beaucoup plus aisé de réaliser des lois de commande pour des systèmes qui sont sous la forme d'une chaîne d'intégrateurs. Nous recherchons donc simplement un point de réduction D lié au véhicule et tel que la composante verticale de sa vitesse ne soit pas directement affectée par la commande en gouvernes.

Par souci de simplicité, nous introduisons l'Hypothèse 2.2, satisfaite en général dans le cadre des véhicules à voilure fixe.

Hypothèse 2.2. Le mouvement du véhicule est principalement translationnel.

En conséquence, les matrices orthogonales de passage entre le repère inertiel et les repères aérodynamiques associés au point G ou au point D sont supposées identiques.

En utilisant la loi de composition de mouvements, la dynamique de ce point D vérifie

$$\widehat{\mathbf{R}}_{0/D} \dot{\mathbf{V}}_D + \widehat{\mathbf{R}}_{0/D} \mathbf{GD} \wedge \mathbf{q} = \mathbf{R}_{0/A} \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (2.36)$$

d'où

$$\dot{\mathbf{V}}_D + \mathbf{R}_{0/D}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{0/D}}{\partial \gamma_D} (\mathbf{V}_D + \mathbf{GD} \wedge \mathbf{q}) \dot{\gamma}_D + \widehat{\mathbf{GD}} \wedge \mathbf{q} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (2.37)$$

En vertu de l'Hypothèse 2.2, on note que $\mathbf{GD} \wedge \mathbf{q}$ est négligeable devant \mathbf{V}_D . On peut alors définir $\widehat{\mathbf{GD}}$ de sorte que $\widehat{\mathbf{GD}} \wedge \dot{\mathbf{q}}$ soit orienté suivant z_e , en posant $\mathbf{GD} = l_e \mathbf{x}_e$. Ainsi nous obtenons la dynamique (V, γ) du point D exprimée dans le repère inertiel :

$$m\dot{V} = T(\alpha, h, \eta) - \frac{1}{2}\rho(h)V^2 S_{\text{ref}} S(V) C_d(\alpha, \delta) - mg(V) \sin \gamma, \quad (2.38a)$$

$$mV\dot{\gamma} = \frac{1}{2}\rho(h)V^2 S_{\text{ref}} S(V) (C_{l0} + C_{l\alpha}\alpha + C_{l\delta}\delta) - mg(V) \cos \gamma - ml_e \dot{q}, \quad (2.38b)$$

où

$$\dot{q} = \frac{1}{2J}\rho(h)V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} (C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta). \quad (2.39)$$

En définissant la longueur de levier l_e par

$$l_e = \frac{S(V)}{l_{\text{ref}}} \frac{J}{m} \frac{C_{l\delta}}{C_{m\delta}}, \quad (2.40)$$

15. Pour l'analyse des systèmes singulièrement perturbés. Voir Kokotovic et al. (1986).

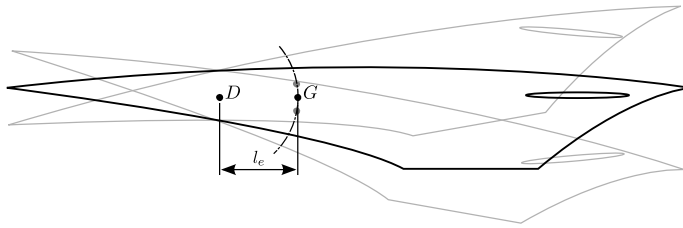


FIGURE 2.17 – Pendant le vol, le point D est défini tel que la composante verticale de sa vitesse n'est pas directement affecté par une variation de gouvernes.

alors l'influence de δ sur la dynamique de γ devrait être nulle. En effet, celle-ci devient

$$mV\dot{\gamma} = \frac{1}{2}\rho(h)V^2S_{\text{ref}}S(V) \left(C_{l_0} + C_{l_\alpha}\alpha - \frac{C_{l_\delta}}{C_{m_\delta}}(C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha) \right) - mg(V)\cos\gamma. \quad (2.41)$$

Cela suppose toutefois de négliger les variations de l_e au cours du temps, du fait de la variation du Mach du véhicule. Pour contourner cette difficulté, nous pouvons fixer l_e à une valeur nominale telle que

$$\left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \delta} \right|_{V_0} = 0, \quad (2.42)$$

ou bien négliger l'effet de la dynamique de l_e dans le changement d'état. C'est le deuxième choix que nous faisons ici, compte tenu de la séparation d'échelle de temps entre la dynamique d'énergie dont dépend l_e et la dynamique dont dépend γ .

Approximation 2.10. La dynamique de l_e est supposée négligeable.

Définissons alors le facteur

$$C_{l_a} = \frac{1}{2m}S_{\text{ref}} \left(C_{l_\alpha} - \frac{C_{l_\delta}}{C_{m_\delta}}C_{m_\alpha} \right), \quad (2.43)$$

et faisons l'hypothèse¹⁶ supplémentaire que

$$C_{l_0} - \frac{C_{l_\delta}}{C_{m_\delta}}C_{m_0} = 0. \quad (2.44)$$

Après remplacement, la dynamique de la pente de vitesse se réduit à

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho(h)V^2S(V)C_{l_a}\alpha - g(V)\cos\gamma}{V}. \quad (2.45)$$

La dynamique du véhicule étant réduite au point D , c'est le couple de variable d'état (h, V) qui sera utilisée comme sortie du modèle, à réguler.

Le changement de coordonnées est illustré dans la Figure 2.17. On y voit clairement que le choix d'une autre variable à commander se justifie pleinement par le fait qu'il est physiquement impossible de générer un moment avec un empennage seul sans générer une force résultante¹⁷.

Remarque 2.13. Nous remarquons avec (2.43) l'intérêt de cette méthode de redéfinition de la sortie. En effet, sous les hypothèses précédentes, la structure linéaire du modèle aérodynamique du véhicule est pleinement conservée. Ainsi, de façon similaire à l'application d'un contrôle hiérarchique décrit dans Poulain et al. (2010), appliquer une redéfinition de la sortie est équivalent à redéfinir les paramètres du coefficient de portance en négligeant la dépendance aux gouvernes.

16. Notons que cette hypothèse se fait sans perte de généralité et n'est utilisée que pour simplifier les notations. Elle est équivalente à considérer une rotation du repère engin par rapport au corps du véhicule.

17. D'autres auteurs, à partir de Parker et al. (2007) et tous les travaux s'appuyant dessus, tels que Fiorentini et al. (2009), ont redéfini le problème en changeant la structure du véhicule : en y ajoutant des gouvernes en position canard. Cependant, la question de la pertinence globale de l'utilisation de canards sur des véhicules hypersoniques n'a pas été investie par les auteurs.

2.10.2 Choix des variables de contrôle

Les actionneurs sont supposés parfaits et s'identifient à chaque instant à leur consigne. Cela concerne :

- la consigne de débit massique de carburant commandé Q_c ;
- la consigne d'orientation des gouvernes δ .

Approximation 2.11. Les actionneurs sont supposés parfaits.

Concernant le débit massique Q_c , il s'agit de la variable physique de commande de carburant, mais comme nous avons vu dans la Section 2.6, la variable logique de commande que nous considérerons est η , le ratio de poussée appliquée par rapport à la poussée disponible. Le vecteur de commande du véhicule est alors le couple (η, δ) .

Par ailleurs, nous retiendrons le bilan aéro-propulsif comme variable de contrôle de l'énergie du véhicule. Celui-ci est défini par

$$e(h, V, \alpha, \delta, \eta) = \frac{1}{m}(T(\alpha, h, \eta) - \frac{1}{2}\rho(h)V^2 S_{\text{ref}} S(V) C_d(\alpha, \delta)). \quad (2.46)$$

La dynamique de la vitesse se réduit donc à

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma. \quad (2.47)$$

2.10.3 Hypothèses sur les mesures

Il est rare en pratique que les mesures de l'état du véhicule soient totalement directement disponibles. Elles sont généralement la sortie d'une chaîne de traitement de signal, avec des étapes obligées d'acquisition, de blocage, de filtrage, de fusion, etc. Étant donné la complexité de cette chaîne de traitement, nous faisons le choix dans notre travail de dissocier la problématique de la commande de celle de la mesure. Nous supposons donc mesurées les différentes variables d'état ; cela concerne :

- l'altitude h ;
- la vitesse V ;
- la pente de vitesse γ ;
- l'incidence α et/ou¹⁸ l'angle d'attitude θ ;
- la vitesse de tangage q .

Ce type d'hypothèse est classique en commande, mais appelle une discussion sur la robustesse de notre contrôleur. En effet, il suffit par exemple d'un mauvais placement d'une centrale inertielle, d'un capteur biaisé ou mal étalonné, de modes de résonance supplémentaires, etc. pour que l'hypothèse ne soit plus vérifiée. À une réécriture près, ces erreurs peuvent en fait être assimilées à des perturbations de modèle. La question de la robustesse du contrôleur par rapport à ce type d'erreur se ramène alors à la question de la robustesse d'un contrôleur par rapport à des perturbations de modèle, dont l'étude est réalisée au Chapitre 5.

Approximation 2.12. Les mesures sont supposées parfaites.

2.10.4 Synthèse du modèle de comportement

À l'aide de (2.10), (2.45) et (2.47), le modèle de comportement du véhicule s'écrit finalement

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (2.48a)$$

$$\dot{V} = e(h, V, \alpha, \delta, \eta) - g(V) \sin \gamma, \quad (2.48b)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho(h)V^2 S(V) C_{l_\alpha} \alpha - g(V) \cos \gamma}{V}, \quad (2.48c)$$

$$\dot{\theta} = q, \quad (2.48d)$$

$$J\dot{q} = \frac{1}{2}\rho(h)V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_m(\alpha, \delta). \quad (2.48e)$$

18. Sachant que $\alpha + \gamma = \theta$.

Les variables d'état sont $(h, V, \gamma, \theta, q)$, avec $\alpha = \theta - \gamma$, les commandes sont (η, δ) et les sorties sont (h, V) .

Ce modèle, proche d'un modèle d'avion, est sous forme bloc-triangulaire inférieure, et laisse apparaître les dynamiques suivantes :

- une dynamique liée à l'énergie du véhicule ;
- un mode dit phugoïde, qui est un oscillateur¹⁹ non linéaire (h, V, γ) amorti et que l'on peut contrôler via le bilan propulsif e et l'attitude θ , en les considérant comme des commandes fictives ;
- une dynamique rapide composée de l'attitude θ et la vitesse de tangage q , contrôlé par l'angle de gouvernes δ .

Nous avons écrit en introduction que ce modèle de comportement devait être une conséquence des hypothèses retenues pour résoudre un problème de commande donné. Le Chapitre 3 sera donc dédié à l'étude de la commande du modèle (2.48). Les principales spécificités de ce modèle rapport à un modèle d'avion classique sont les suivantes :

- la poussée, incluse dans le bilan aéro-propulsif, est une fonction de l'état ;
- des incertitudes significatives de modélisation portent sur le modèle de poussée ainsi que sur les différents facteurs aérodynamiques contenus dans C_{l_a} , e et C_m ;
- la gravitation est considérée dépendante de la vitesse.

Par ailleurs, le véhicule devra être commandé dans le respect de certaines contraintes.

Résumé des contraintes pour la commande

Un excès de combustion peut entraîner un désamorçage de l'entrée d'air. Afin de se prémunir de ce risque et de garantir l'intégrité du véhicule au cours du vol, la poussée commandée devra être limitée en richesse.

Une prise d'incidence excessive aurait des conséquences difficilement prévisibles mais certainement graves. Il est notamment nécessaire de limiter les prises d'incidence du véhicule afin de conserver l'entrée d'air du moteur dans son domaine d'opération. Il peut être également utile de limiter les risques que le véhicule soit soumis à des efforts ou des flux thermiques trop élevés. Donc, pour garantir l'intégrité du véhicule pendant le vol, les prises d'incidences réalisées doivent être limitées.

L'entrée d'air est particulièrement sensible au dérapage. Dès le premier degré de dérapage, on peut attendre une dégradation significative des performances de l'entrée d'air, et donc de la propulsion. Par conséquent, le véhicule devra voler sans prise de dérapage, avec d'éventuelles manœuvres en virage incliné.

La présence de cycles limites marginalement stables au niveau de l'interaction entre fluide et structure suppose de réaliser la synthèse du contrôleur de sorte qu'il n'excite pas les dynamiques rapides négligées.

2.11 Simulation en boucle ouverte

2.11.1 Modèle de simulation

La Figure 2.18 montre la simulation du véhicule décrit dans le plan de symétrie vertical par (2.3). Cette simulation laisse apparaître trois modes qui dominent le comportement dynamique du véhicule. Un mode lié à l'énergie, illustré ici par une lente décroissance de la vitesse ; un mode phugoïde qui opère un transfert entre énergie cinétique et altitude, lentement oscillant et très faiblement amorti ; enfin un mode de rotation, dynamique rapidement oscillante et faiblement amortie. L'influence du mode phugoïde sur le mode rapide témoigne du couplage aéro-propulsif induit par une poussée désaxée.

Il apparaît ici assez clairement que même si les véhicules à propulsion aérobie peuvent être conçus avec une marge statique qui permette la stabilité du véhicule, cette stabilité en boucle ouverte est assez marginale. Ainsi, de simples rafales de vent suffisent à exciter sensiblement le mode rapide. La nécessité d'un pilote qui contrôle activement le véhicule est de ce fait assez évidente.

19. C'est un mouvement légèrement amorti en pratique, du fait du rôle dissipatif de la trainée.

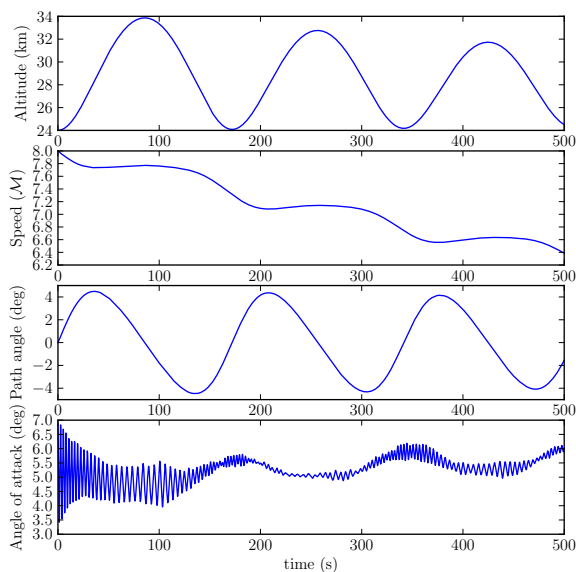


FIGURE 2.18 – Simulation : largage du modèle de simulation du véhicule, non contrôlé.

2.11.2 Modèle de comportement

La Figure 2.19 montre la simulation du modèle de véhicule (2.48) décrivant son comportement dans le plan de symétrie vertical. Cette simulation est à mettre en perspective avec la Figure 2.18. Elle montre elle aussi les trois modes qui dominent le comportement dynamique du véhicule. On remarque bien sûr que, n'étant pas perturbé par le vent et n'étant pas soumis à un moment aéro-propulsif, le mode rapide du véhicule se stabilise lentement autour d'un équilibre. Les résultats de la simulation du modèle de comportement en boucle ouverte sont finalement relativement proches de celle du modèle de connaissance, ce qui illustre la proximité entre nos deux modèles à l'échelle qui nous intéresse, et ce qui valide au moins partiellement notre démarche de modélisation du comportement du véhicule.

2.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons précisé les hypothèses pour définir notre problème de commande. Pour cela, il a fallu réduire la complexité des phénomènes considérés. Nous avons fait ceci en deux temps. D'abord nous avons discuté et sélectionné les phénomènes à retenir dans nos différents modèles. Ensuite, nous avons simplifié nos modèles, en particulier concernant la structure du modèle de propulsion. Enfin nous avons précisé les structures de modèle permettant des identifications paramétriques sur la base de données de simulation ou d'hypothèses de dimensionnement.

Une fois cette complexité réduite, nous avons travaillé sur le modèle de comportement afin de le rendre plus facile à contrôler. Pour cela, nous avons redéfini les entrées et les coordonnées du modèle, de sorte que la dynamique apparaisse sous forme triangulaire par bloc. Le modèle finalement obtenu, décrit par (2.48), ressemble à celui d'un avion, avec des spécificités et des contraintes supplémentaires.

Les différents modèles obtenus ont été simulés en boucle ouverte, avec des résultats de simulations proches entre eux. Ces résultats illustrent la représentativité de notre modèle de comportement sur les domaines et échelles de temps considérés.

Au final, les phénomènes en jeu dans le vol des HSV, dont seule une part limitée a été prise en compte, sont d'une grande complexité. En effet, outre le fait que nous sommes en présence de phénomènes intrinsèquement complexes, il apparaît également que nombre d'entre eux sont interdépendants. Les couplages aéro-propulsifs sont, par

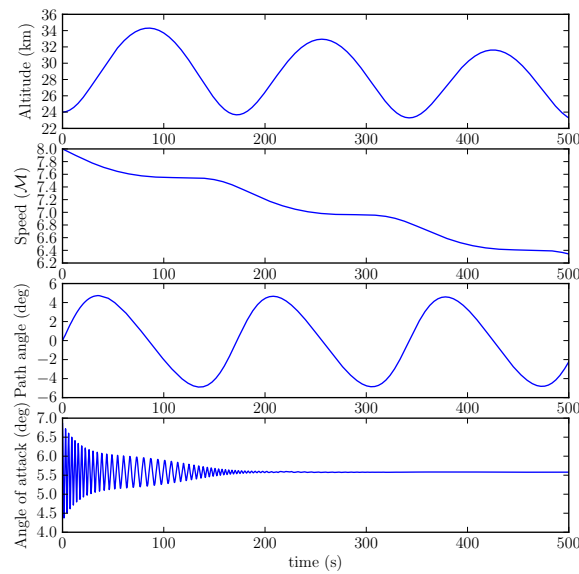


FIGURE 2.19 – Simulation : largage du modèle de comportement du véhicule, non contrôlé.

exemple, caractéristiques des véhicules hypersoniques à propulsion aérobie.

Par ailleurs, nous sommes en présence de beaucoup de phénomènes incertains ou de considérations spéculatives. De fait, nous ne disposons que de peu de données expérimentales caractérisant des phénomènes isolés en laboratoire, et nous devons reposer notre analyse sur des simulations, limitées par essence, ainsi que différentes considérations recueillies au cours des expériences publiées par différentes équipes. Il n'existe pas vraiment non plus de modèle de référence en la matière sur lequel s'appuyer ou bien grâce auquel corroborer nos propositions. Les travaux de Parker et al. (2007) laissent toutefois apparaître des similitudes en matière de propulsion et de coefficients aérodynamiques par rapport à nos propositions.

2.13 Perspectives

Nous disposons à ce stade d'un modèle de comportement que nous allons utiliser au Chapitre 3, pour faire la synthèse de loi de commande.

En plus de ce modèle, différentes contraintes ou spécificités apparaissent comme devant être prises en compte au niveau de la synthèse de commande. Parmi elles, notons par exemple les problèmes de couplage aéro-propulsifs, les problèmes d'incertitude de modélisation, les effets de forces directes induites par les gouvernes. À ceci, nous pouvons également ajouter la nécessité de borner l'excursion des variables de commande. En effet, d'une part les excès de poussée sont susceptibles de rendre inopérante la propulsion ; d'autre part, il est nécessaire de limiter les prises d'incidence du véhicule afin de limiter les risques d'exposition de l'entrée d'air à un flux inadapté à son fonctionnement, ou sinon afin de limiter les risques que le véhicule soit soumis à des efforts ou des flux thermiques trop élevés. Chacun de ces problèmes suppose donc des qualités que notre contrôleur devra respecter afin de garantir l'intégrité du véhicule au cours du vol.

Il y a une nécessité de réaliser la synthèse du contrôleur de sorte qu'il n'excite pas les dynamiques rapides négligées. D'ailleurs la question de la désensibilisation de notre contrôleur aux incertitudes de modélisation est une question de première importance. En effet, comme nous avons dit, la plupart des caractéristiques que nous proposons sont sujettes à des variations ou des incertitudes significatives. Cela concerne en particulier l'efficacité de captation d'air et l'impulsion spécifique de la propulsion. Il faudra donc proposer une synthèse de commande qui tienne compte de ces contraintes.

Deuxième partie

Synthèse de commande

Chapitre 3

Guidage et pilotage de la dynamique longitudinale

Résumé. À partir du modèle de comportement obtenu, nous proposons de synthétiser un contrôleur sur le modèle de dynamique longitudinale du véhicule hypersonique (HSV). Le problème posé est de stabiliser une trajectoire de croisière, en respectant les différentes contraintes de saturation sur la commande, et avec un objectif de robustesse aux incertitudes de modélisation. Pour cela nous montrons d’abord que la dynamique de guidage du véhicule est celle d’un oscillateur dissipatif. Puis nous mettons à profit cette propriété pour la synthèse de la loi de guidage. La loi de pilotage est obtenue par rétropropagation. Différentes simulations illustrent le résultat obtenu.

3.1 Introduction

Le domaine aéronautique distingue habituellement différents niveaux de commande pour le contrôle des véhicules : guidage¹ et pilotage²; chacun de ces niveaux de commande ayant des contraintes et méthodologies spécifiques. En pratique, les différences de constantes de temps impliquées entre la dynamique de pilotage et la dynamique de guidage justifient une telle conception hiérarchisée. Cela permet de réduire la complexité de la synthèse de commande.

Toutefois, ce choix de conception implique généralement de spécifier des marges de conceptions qui ne sont généralement pas souhaitables dans un domaine fortement contraint par les performances. Par ailleurs, partant du constat que les HSV évoluent sur des trajectoires différentes de la plupart des systèmes aérospatiaux existants (fusées, avions), il apparaissait intéressant de ne pas restreindre le pilote à la seule stabilisation de l’attitude³.

Nous avons donc posé le problème de la commande du vecteur vitesse, directement à partir des actionneurs de bas niveau. Il apparaît également que c’est au niveau du guidage que les spécificités du vol aérobie à grande vitesse sont les plus manifestes.

C’est pourquoi nous proposons dans notre démarche une synthèse de contrôleur non hiérarchisé, c’est-à-dire dont l’objet est de contrôler une trajectoire de croisière directement par les actionneurs. Pour ce faire, nous posons dans la Section 3.2 ce problème de

1. Le guidage concerne l’élaboration de la trajectoire et son suivi. Il s’agit généralement de poser un problème de commande optimale.

2. Le pilotage est une loi de commande destinée à l’orientation du véhicule. Le pilote est généralement la commande de « bas niveau » qui agit directement sur les actionneurs du véhicule de façon à orienter le véhicule par rapport à la trajectoire. Cette orientation est généralement calculée pour réaliser l’accélération nécessaire à la mise en œuvre de la consigne de guidage.

3. Dès le début de nos travaux la question de l’*objectif* du pilote était posée de façon préalable à notre démarche — quelle est la consigne ? Nous ne disposons pas de résultats disponibles à ce sujet.

commande comme un problème de régulation de la sortie d'un procédé invariant et nous abordons la construction d'une fonction de Lyapunov strictement continument assignable au système⁴. Nous construisons cette fonction de façon itérative en exploitant la structure triangulaire du modèle mise en évidence au Chapitre 2. Pour cela, la Section 3.4 est dédiée à l'étude de la structure d'oscillateur du sous-système (h, V, γ) . Cette étude est ensuite mise à profit pour construire une loi de guidage dans la Section 3.5 afin d'en dériver une loi de guidage/pilotage dans la Section 3.6. Afin d'illustrer la robustesse de la loi de commande proposée, des simulations montrent le comportement des solutions sur le modèle de simulation développé au Chapitre 2.

3.2 Définition du problème

Définition 3.1 (Guidage). Nous appelons guidage l'objectif de commande de la trajectoire (le vecteur vitesse).

Définition 3.2 (Pilotage). Nous appelons pilotage l'objectif de commande de l'attitude (le vecteur rotation).

À partir du modèle (2.48), dans le Chapitre 2, nous nous intéressons à la synthèse de commande pour le modèle suivant :

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (3.1a)$$

$$\dot{V} = e(h, V, \alpha, \delta, \eta) - g(V) \sin \gamma, \quad (3.1b)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho(h)(\theta - \gamma)C_{l_a}V^2S(V) - g(V) \cos \gamma}{V}, \quad (3.1c)$$

$$\dot{\theta} = q, \quad (3.1d)$$

$$J\dot{q} = \frac{1}{2}\rho(h)V^2S_{\text{ref}}l_{\text{ref}}C_m(\alpha, \delta), \quad (3.1e)$$

où h désigne l'altitude, V la vitesse, γ est la pente de vitesse, θ l'attitude et q la vitesse de rotation du véhicule. Les commandes du véhicule sont l'angle des gouvernes δ ainsi que η , correspondant au ratio poussée commandée sur poussée disponible. Les sorties considérées du modèle sont l'altitude h et la vitesse V . Nous supposons que des consignes de vol h_0 et V_0 sont définies *a priori*.

Ce modèle est représentatif de toute une classe de véhicules aériens à voilure fixe, propulsés, et évoluant dans un plan vertical dans un environnement faiblement perturbé : il suffit par exemple de poser $g(V) = g_0$ et $S(V) = 1$ pour obtenir le modèle de la dynamique d'un avion.

Dans notre étude, le problème de commande se pose alors de la façon suivante : contrôler le véhicule en utilisant le couple (η, δ) de façon à faire converger la sortie (h, V) vers une référence (h_0, V_0) .

Notre contrôleur devra être robuste aux incertitudes de modélisation contenues dans e , C_{l_a} et C_m , être tolérant à des saturations sur α et η , et ne pas exciter les dynamiques rapides négligées.

3.3 Discussion sur la structure du modèle

Une structure bloc-triangulaire

Abstraction faite de la définition de e donnée par (2.46), on remarque que le modèle (3.1) possède une structure bloc-triangulaire, séparant la dynamique de guidage (h, V, γ) de la dynamique de rotation (θ, q) . Cette structure a été largement étudiée au cours des années 1990, avec en particulier l'introduction des techniques de rétropropagation (*backstepping*; voir Krstic et al. (1995) pour une présentation) et de *forwarding* (pour

4. Voir l'Annexe A.

une présentation de différentes techniques de *forwarding*, voir Teel (1996); Jankovic et al. (1996); Mazenc et Praly (1996)). Ces différentes techniques permettent une construction itérative de contrôleurs en étendant à chaque étape la dimension du modèle. Offrant un cadre méthodologique pour la synthèse de lois de commande non linéaires et l'obtention de fonction de Lyapunov assignables au systèmes, ces techniques sont devenues très populaires.

C'est cette logique que nous allons suivre, en considérant en premier lieu la stabilisation de l'équilibre du sous-système (h, V, γ) par l'intermédiaire du bilan aéro-propulsif e et de l'angle d'incidence aérodynamique $\alpha = \theta - \gamma$. Deux étapes de *backstepping* seront ensuite nécessaires pour commander le système (θ, q) sur la consigne de guidage obtenue à l'étape précédente.

Une dynamique de guidage dissipative

Nous montrerons de plus que le sous-système (h, V, γ) possède un équilibre stable lorsque ses entrées sont définies comme $e = 0$ et $\alpha = \alpha_0 > \sqrt{R_t/g_0} > 0$. Cette propriété de dissipativité⁵ est une *propriété clé* du système considéré qui a orienté l'ensemble de nos travaux. En effet, elle offre l'opportunité de conclure en présence de contraintes pratiques telles que :

- le problème des saturations d'actionneur et contraintes sur l'état ;
- la quantité d'information *a priori* embarquée dans le contrôleur ;
- la complexité du contrôleur embarqué ;
- la robustesse aux dynamiques négligées ;
- la question du sens physique donné à la loi de commande obtenue.

Ces contraintes sont courantes dans le domaine de la commande, mais difficiles à prendre en compte en pratique. C'est pourquoi nous entreprenons dans la suite d'exploiter cette propriété de dissipativité afin de contribuer à faire progresser les techniques de synthèse de commande dans le domaine aéronautique.

Définition 3.3 (Phugoïde). Une phugoïde est le mouvement oscillatoire d'un avion, durant lequel l'appareil oscille en montant puis en piquant du nez.

La dissipativité du mode (h, V, γ) — dit phugoïde — fut déjà mise en évidence⁶ et exploitée pour la conception de commande non linéaire, dans un contexte de rentrée atmosphérique dans Praly et Coron (2001). En ce qui concerne le modèle (3.1), nous établirons dans la section suivante que la dissipativité du sous-système (h, V, γ) lorsque $e = 0$ et $\alpha = \alpha_0 > 0$ est une conséquence directe du fait qu'il s'agit d'une version modifiée de l'oscillateur de Zhukovskii.

3.4 L'oscillateur de Zhukovskii

3.4.1 Présentation

En 1891, Nikolai E. Zhukovskii résout le problème du mouvement d'un corps suffisamment fin volant dans une atmosphère homogène, résultat publié sous le titre *Sur le vol des oiseaux*. Par la suite, Frederick William Lanchester étudia également la stabilité de ce même oscillateur dans Lanchester (1908). Nous nous inspirons ici des éléments de l'analyse présentée dans Andronov et al. (1987) pour présenter succinctement l'oscillateur.

Le modèle dynamique considéré est le suivant :

$$\dot{v} = -\sin \phi - av^2, \quad \dot{\phi} = \frac{v^2 - \cos \phi}{v}, \quad (3.2)$$

où $v \in \mathbb{R}^+$ et $\phi \in \mathbb{S}$ sont respectivement, à un changement de variable près, la vitesse et la pente, tandis que a est inversement proportionnel à la finesse. Ce modèle

5. Voir l'Annexe A.

6. Voir également Svirezhev (1966), découvert au cours de la rédaction de ces lignes, qui résout les trajectoires phugoïdes de véhicules suffisamment fins avec une atmosphère de densité exponentielle.

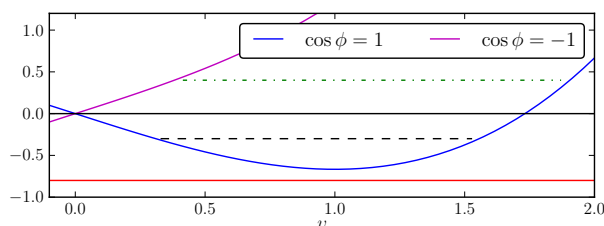


FIGURE 3.1 – Tracé de la fonction $y(y^2/3 - \cos \phi)$ pour $\cos \phi = \pm 1$. Différentes configurations de trajectoires sont possibles selon les valeurs de c . ($c < -2/3$ en rouge; $-2/3 < c < 0$ en trait discontinu noir; $c > 0$ en trait d'axe vert)

possède une singularité définie par $v = 0$ ainsi que des points d'équilibre $(v_0, \phi_0) = (\pm\sqrt{\cos(\arctan a)}, -\arctan a)$. Du fait de la singularité du modèle, on s'intéresse par la suite au cas où v est strictement positif.

Nous restreignons notre étude au vol non trainé. Il s'agit du cas où $a = 0$, qui peut être considéré comme l'approximation à la limite d'un vol à grande finesse. On peut alors poser

$$\frac{dv}{d\phi} = \frac{v \sin \phi}{\cos \phi - v^2}, \quad (3.3)$$

dont on peut vérifier que la solution est donnée par la relation

$$\frac{1}{3}v^3 - v \cos \phi = c, \quad (3.4)$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante dépendante des conditions initiales de l'équation différentielle (3.2). La Figure 3.1 illustre l'évolution des solutions en fonction des valeurs de c . D'après Andronov et al. (1987), différents types de trajectoire sont possibles :

- $c < -2/3$: il n'existe pas de trajectoire avec $v \geq 0$.
- $c = -2/3$: l'orbite est réduite au point d'équilibre $(v_0, \phi_0) = (1, 0)$.
- $-2/3 < c < 0$: l'orbite entoure l'équilibre et est contractible à ce point.
- $c = 0$: l'orbite est l'union de deux ensembles $\{(v, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S} : v = 0\}$ et $\{(v, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S} : v^2 = 3 \cos \phi\}$ qui se coupent en $(v = 0, \phi = \pm \frac{\pi}{2})$.
- $c > 0$: l'orbite n'entoure plus l'équilibre et n'est plus contractible à un point.

À partir de l'équation (3.4), nous pouvons aisément tracer les orbites correspondantes. La Figure 3.2 illustre différentes trajectoires possibles dans l'espace des phases, et la Figure 3.3 montre leur réalisation dans l'espace physique : les courbes phugoides⁷. Le domaine d'évolution du véhicule est un ouvert, contenu dans le demi-cylindre défini par $v > 0$. Cependant, l'orbite définie par la solution lorsque $c = 0$ coupe ce demi-cylindre en deux composantes connexes.

Définition 3.4 (Domaine de stabilité). Nous appelons domaine de stabilité la composante connexe du domaine d'évolution du système, qui contient le point d'équilibre, qui est positivement invariante et telle que la fermeture des orbites positives est dans le domaine d'évolution.

En pratique, le domaine de stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii est délimité par une orbite singulière qui intersecte les points $(v = 0, \phi = \pm \frac{\pi}{2})$.

7. L'anecdote veut que ce nom ait été choisi par Lanchester, recherchant un nom classique pour sa théorie des oscillations se produisant pendant le vol. Il est avéré que la racine grecque *phug* ($\phi\nu\gamma$) et la racine latine *fug* correspondent toutes deux au mot *flight* anglais; d'où le choix de courbe *phugöide* : "From the Greek $\phi\nu\gamma$ and $\epsilon\iota\delta\omicron\varsigma$ (*flight-like*)" (Lanchester, 1908, Preface, p. viii). Malheureusement, le grec *phug* comme le latin *fug* signifient en réalité *flight* au sens de *prendre la fuite*.

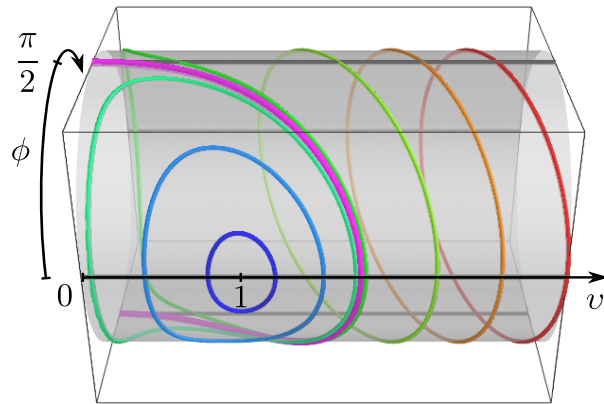


FIGURE 3.2 – Illustration de différentes orbites dans l'espace $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}$. La trajectoire magenta représente le cas où $c = 0$, l'orbite passe alors par la singularité $\nu = 0$.

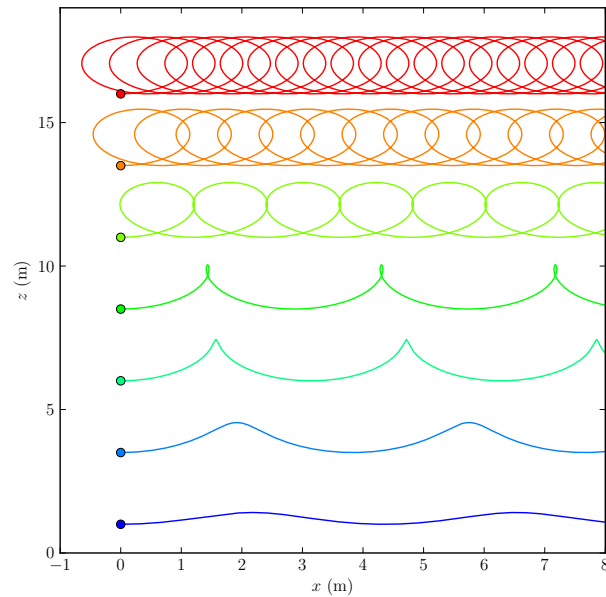


FIGURE 3.3 – Illustration de différentes trajectoires phugoides intégrées dans l'espace physique.

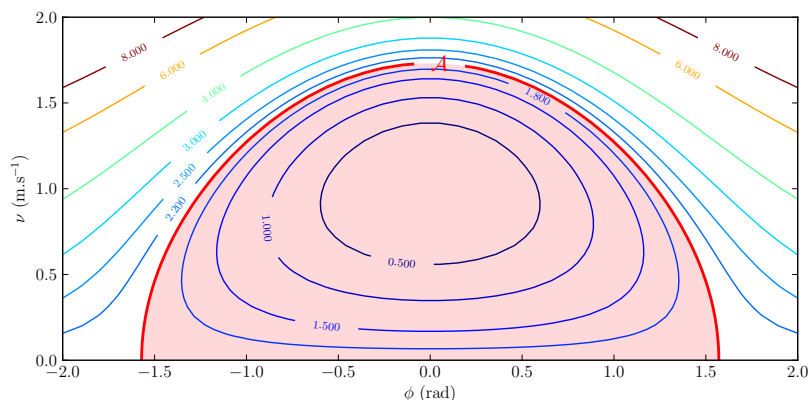


FIGURE 3.4 – Tracé de lignes de niveau de la fonction $3W(v, \phi)$. L'ensemble \mathcal{A} , défini par (3.5) est délimité par $3W(v, \phi) < 2$.

3.4.2 Stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii

La proposition qui suit montre la stabilité de l'équilibre *via* la méthode directe de Lyapunov.

Proposition 3.1 (Stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii). *L'oscillateur de Zhukovskii est dissipatif. L'équilibre $(v_0, \phi_0) = (1, 0)$ est stable et son domaine de stabilité est l'ouvert*

$$\mathcal{A} = \left\{ (v, \phi) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{S} : W(v, \phi) < \frac{2}{3} \right\}. \quad (3.5)$$

Démonstration. Considérons la fonction $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$W(v, \phi) = \frac{1}{3}(v-1)^2(v+2) + v(1-\cos\phi) = \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{3} - v\cos\phi, \quad (3.6)$$

dont on remarque que les lignes de niveau vérifient (3.4). Puisque les termes $(v-1)^2(v+2)$ et $v(1-\cos\phi)$ sont positifs ou nuls sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}$, W est nul sur cet ensemble si et seulement si chacun des termes est nul, donc si et seulement si $(v_0, \phi_0) = (1, 0)$, et W est positive partout ailleurs sur l'ouvert $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}$.

Par définition, l'ensemble \mathcal{A} contient l'équilibre $(1, 0)$ et ne contient aucun point où $v = 0$. Par ailleurs, W est définie positive sur \mathcal{A} . De plus, le gradient de W n'est jamais nul sur \mathcal{A} ailleurs qu'en $(1, 0)$. Donc les épigraphes de W sont contractibles à un point, et l'ensemble \mathcal{A} est connexe.

Ensuite, un calcul simple montre que la dérivée de $W(v, \phi)$ le long des trajectoires est nulle pour tout couple (v, ϕ) à valeurs initiales dans \mathcal{A} , ce qui nous permet d'établir la stabilité de l'équilibre, et la dissipativité de l'oscillateur. De plus, les trajectoires de l'oscillateur restent sur des niveaux constants de la fonction $W(v, \phi)$. La fermeture de leur orbite est donc dans \mathcal{A} . \square

La restriction au domaine \mathcal{A} se justifie dans la mesure où nous avons pour objectif la réalisation d'une croisière hypersonique. Il n'est nullement possible d'y faire des boucles en *looping* ou bien de s'approcher de l'orbite intersectant la singularité $v = 0$. La Figure 3.4 illustre le domaine \mathcal{A} .

3.4.3 Stabilité du mode phugoïde hypersonique

Après avoir mis en évidence quelques aspects de l'oscillateur de Zhukovskii, nous pouvons poursuivre en montrant que le système (h, V, γ) de (3.1) possède une structure très proche de l'oscillateur de Zhukovskii, et établir par là l'existence d'un équilibre stable lorsque l'équilibre aéro-propulsif est maintenu et que l'incidence est fixée.

Pour cela, commençons par remarquer que le système

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (3.7a)$$

$$\dot{V} = -g(V) \sin \gamma, \quad (3.7b)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\alpha_0 \rho(h) C_{l_a} V^2 S(V) - g(V) \cos \gamma}{V}, \quad (3.7c)$$

est constitué de deux systèmes indépendants.

Une version modifiée de l'oscillateur de Zhukovskii

Proposition 3.2. *Le système (3.7), avec (h, V, γ) évoluant dans $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S}$, où $\mathcal{V} =]0 ; \sqrt{R_t g_0}[$, est équivalent à deux systèmes indépendants : une version modifiée de l'oscillateur de Zhukovskii et une dynamique d'énergie.*

Ceci est une conséquence du maintien de l'équilibre aéro-propulsif (c'est-à-dire $e = 0$ dans (3.1)) : l'altitude et la vitesse sont géométriquement liées. Les trajectoires du système (3.7) évoluent donc sur une variété de dimension 2 incluse dans \mathbb{R}^3 , et nous pouvons découpler (3.7) pour obtenir la somme de deux systèmes indépendants.

Démonstration. D'après (2.24), nous avons

$$g(V) = g_0 - \frac{V^2}{R_t}. \quad (3.8)$$

Puisque

$$\frac{dh}{dV} = \frac{V}{g(V)}, \quad (3.9)$$

définissons la fonction $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\sigma(V) = \int_0^V \frac{s}{g(s)} ds = -\frac{R_t}{2} (\ln g(V) - \ln g_0). \quad (3.10)$$

Nous avons

$$\overline{\sigma(V) + h} = 0, \quad (3.11)$$

donc la fonction $\sigma(V) + h$ est constante le long des trajectoires.

Par ailleurs, nous avons $h - h_0 = -R_t/2 \ln(g(V)/g_0)$ le long des solutions du système (3.7), avec $h_0 \in \mathbb{R}$ dépendant des conditions initiales. À partir de là et de (2.25), nous pouvons exprimer la relation

$$\rho(h) = \exp(-ah + b) = \exp\left(-ah_0 + b - a \frac{R_t}{2} \ln \frac{g(V)}{g_0}\right) = \rho(h_0) \left(1 - \frac{V^2}{g_0 R_t}\right)^{-a \frac{R_t}{2}}. \quad (3.12)$$

Considérons alors d'une part la fonction $\Lambda_\rho : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ définie par

$$\Lambda_\rho(V) = \frac{\rho(h_0) C_{l_a} V^2 S(V)}{g(V) \left(1 - \frac{V^2}{g_0 R_t}\right)^{a \frac{R_t}{2}}}, \quad (3.13)$$

et notons qu'elle est strictement croissante pour $V \in \mathcal{V}$ puisque $V^2 S(V)$ est strictement croissante par rapport à V et que, a étant positif et g étant strictement positive et décroissante, $g(V)^{-1-aR_t/2}$ est strictement croissante.

Considérons d'autre part le changement d'échelle de temps $d\tau = g(V)dt$, et notons le $\circ = \frac{d}{d\tau}$. On peut alors récrire le système (3.7) comme :

$$\overline{\sigma(V) + h} = 0, \quad \overset{\circ}{V} = -\sin \gamma, \quad \overset{\circ}{\gamma} = \frac{\alpha_0 \Lambda_\rho(V) - \cos \gamma}{V}. \quad (3.14)$$

□

Stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii modifié

De façon identique à celle de la sous-section 3.4.2, nous pouvons étudier la stabilité de l'équilibre de (3.14) par la méthode directe de Lyapunov.

Proposition 3.3 (Stabilité du vol hypersonique à incidence fixe). *Pour tout $\alpha_0 \in]1/\Lambda_\rho(\sqrt{R_t g_0}) ; +\infty[$, le système*

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sin \gamma, & \dot{\gamma} &= \frac{\alpha_0 \Lambda_\rho(V) - \cos \gamma}{V} \end{aligned} \quad (3.15)$$

est dissipatif, possède un unique équilibre $(\Lambda_\rho^{-1}(1/\alpha_0), 0)$ stable et son domaine de stabilité est un ouvert, défini par la composante connexe de l'ensemble

$$\left\{ (V, \gamma) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{S} : W(V, \gamma) < \bar{W} = \alpha_0 \int_{V_0}^0 \Lambda_\rho(s) ds + V_0 \right\} \quad (3.16)$$

contenant le point $(V_0, 0)$.

Démonstration. Puisque $V \mapsto \Lambda_\rho(V)$ est continue et strictement croissante sur \mathcal{V} , elle est bijective. Donc l'équation $\alpha_0 \Lambda_\rho(V) = 1$ possède une solution unique $V_0 = \Lambda_\rho^{-1}(1/\alpha_0)$, ce qui établit l'unicité de l'équilibre $(V_0, 0)$ sur le domaine considéré.

Considérons la fonction $W : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$W(V, \gamma) = \int_{V_0}^V \left(\frac{\Lambda_\rho(s)}{\Lambda_\rho(V_0)} - 1 \right) ds + V(1 - \cos \gamma) = \alpha_0 \int_{V_0}^V \Lambda_\rho(s) ds + V_0 - V \cos \gamma, \quad (3.17)$$

nulle pour la valeur d'équilibre $(V, \gamma) = (V_0, 0)$ et positive pour $(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S}$. La fonction $W(V, \gamma)$ est constante le long des trajectoires du système, ce qui établit la stabilité de l'équilibre (3.7) et la dissipativité du système.

Caractérisons désormais l'ensemble \mathcal{A} . Puisque $W(V, \gamma)$ est constante le long des trajectoires, et puisque les trajectoires sont des arcs continus, \mathcal{A} est positivement invariant. De plus, l'ensemble \mathcal{A} est borné.

Pour montrer cela, on remarque premièrement que $V > 0$, car $V_0 > 0$, or $V = 0$ violerait la contrainte $W(V, \gamma) < \bar{W}$. Deuxièmement, puisque $V_0 > 0$ et $\Lambda_\rho(V) > 0$ pour $V \in \mathcal{V}$, l'équation

$$W(V, \gamma) = \bar{W} + \alpha_0 \int_0^V \Lambda_\rho(s) ds - V \cos \gamma = c, \quad (3.18)$$

où $0 \leq c < \bar{W}$, n'a de solution possible que si $\cos \gamma > 0$. D'où $\gamma \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$. Troisièmement, d'après la définition de Λ_ρ , nous avons

$$\lim_{V \nearrow \sqrt{R_t g_0}} \frac{1}{V} \int_{V_0}^V \Lambda_\rho(s) ds = +\infty. \quad (3.19)$$

De plus, puisque $V \mapsto \Lambda_\rho$ est continue, strictement croissante et à valeurs positives sur \mathcal{V} , alors l'application

$$V \mapsto \frac{1}{V} \int_0^V \Lambda_\rho(s) ds \quad (3.20)$$

est continue, strictement croissante⁸, et réalise une bijection de \mathcal{V} vers \mathbb{R}_*^+ . Or, puisque

$$W(V, \gamma) = \bar{W} + \alpha_0 \int_0^V \Lambda_\rho(s) ds - V \cos \gamma, \quad (3.21)$$

8. En effet, $\frac{d}{dV} \left(\frac{1}{V} \int_0^V \Lambda_\rho(s) ds \right) = 0$ implique $\int_0^V \Lambda_\rho(s) ds = V \Lambda_\rho(V)$. Or Λ_ρ est strictement croissante, ce qui implique $\int_0^V \Lambda_\rho(s) ds < V \Lambda_\rho(V)$. D'où la monotonie et la croissance de (3.20).

pour chaque $\gamma \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, il existe un $V^+(\gamma)$ vérifiant

$$\alpha_0 \frac{1}{V^+(\gamma)} \int_0^{V^+(\gamma)} \Lambda_\rho(s) ds < \cos \gamma \leq 1, \quad (3.22)$$

du fait de la monotonie de (3.20). Par conséquent, il existe un $\bar{V} \in \mathcal{V}$ défini par

$$\bar{V} = \max_{\gamma \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[} V^+(\gamma) \quad (3.23)$$

et tel que $(V, \gamma) \in \mathcal{A}$ implique $V < \bar{V}$. De plus, il n'existe qu'une seule composante connexe de l'ensemble défini par (3.16) restreint à $\mathcal{V} \times \mathbb{S}$, et elle contient l'équilibre $(V_0, 0)$.

Nous pouvons finalement préciser la définition de \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \{(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W(V, \gamma) < W(0, 0)\}. \quad (3.24)$$

□

3.4.4 Application à la stabilité du vol hypersonique

Pour terminer cette section, on peut déduire des Propositions 3.2 et 3.3 une propriété bien connue des pilotes d'avions : la stabilité asymptotique de l'équilibre du mode phugôde lorsque l'appareil est maintenu cabré avec une attitude constante. Cette propriété, notamment développée localement dans (Wanner, 1983, Chapitre IV), est en fait mise en œuvre par tous les pilotes qui commandent manuellement les avions sur un palier stabilisé. Le Théorème 3.1 établit le résultat pour le vol hypersonique⁹, qui se caractérise par une aérodynamique dépendante du Mach et par la présence de l'accélération de Coriolis dans le modèle.

Théorème 3.1 (Stabilité du vol hypersonique à attitude fixe). *Le système défini par*

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (3.25a)$$

$$\dot{V} = -g(V) \sin \gamma, \quad (3.25b)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{(\theta_0 - \gamma)\rho(h)C_{l_a}V^2S(V) - g(V)\cos \gamma}{V}, \quad (3.25c)$$

où $\theta_0 \in]1/\Lambda_\rho(\sqrt{R_t g_0}); +\infty[$, possède une variété d'équilibre \mathcal{E} attractive et invariante dont le bassin d'attraction contient $\mathbb{R} \times \mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S}$, où

$$\mathcal{C} = \{(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W_\theta(V, \gamma) \leq W_\theta(0, 0) - \epsilon\}, \quad (3.26)$$

avec $0 < \epsilon < W_\theta(0, 0)$. De plus, chaque trajectoire demeure bornée sur \mathcal{E} .

Démonstration. En reprenant la démarche de la Proposition 3.2, et sachant que $\gamma + \alpha = \theta$, on se ramène à l'étude de

$$\overbrace{\sigma(V) + h}^\circ = 0, \quad \overset{\circ}{V} = -\sin \gamma, \quad \overset{\circ}{\gamma} = \frac{(\theta_0 - \gamma)\Lambda_\rho(V) - \cos \gamma}{V}. \quad (3.27)$$

Considérons alors la fonction $W_\theta : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$W_\theta(V, \gamma) = \psi(\sigma(V) + h - \sigma(V_0) - h_0) + \theta_0 \int_{V_0}^V \Lambda_\rho(s) ds + V_0 - V \cos \gamma, \quad (3.28)$$

avec $V_0 = \Lambda_\rho^{-1}(1/\theta_0)$ et $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction définie positive et radialement non bornée. La dérivée de W_θ par rapport à τ le long des trajectoires vérifie

$$\overbrace{W_\theta(V, \gamma)}^\circ = -\gamma \Lambda_\rho(V) \sin \gamma \leq 0. \quad (3.29)$$

9. Il suffit de poser $S(V) = 1$ pour retrouver le résultat analogue pour un vol subsonique.

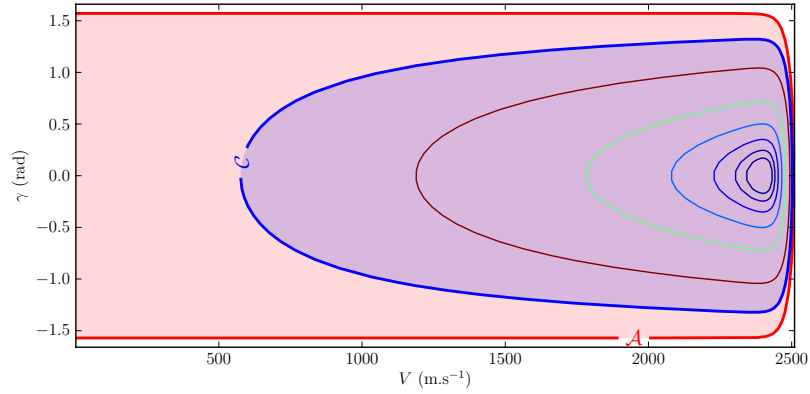


FIGURE 3.5 – Tracé de lignes de niveau de la fonction $W(V, \gamma)$, pour $V_0 = 2400 \text{ m.s}^{-1}$. L'ensemble \mathcal{A} , défini par (3.24) est délimité en rouge. L'ensemble \mathcal{C} , défini par (3.30) est délimité en bleu.

En considérant l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ positivement invariant où \mathcal{C} est défini par

$$\mathcal{C} = \{(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W_\theta(V, \gamma) \leq W_\theta(0, 0) - \epsilon\}, \quad (3.30)$$

avec $0 < \epsilon < W_\theta(0, 0)$, et étant donné que $(V, \gamma) \in \mathcal{C}$ implique $\gamma \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, alors en appliquant le principe d'invariance, on montre que les trajectoires initialisées dans $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ convergent vers le plus grand ensemble invariant inclus dans

$$\{(h, V, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C} : \gamma \Lambda_\rho(V) \sin \gamma = 0\}. \quad (3.31)$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{E} = \{(h, V, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C} : \theta_0 \rho(h) C_{l_a} V^2 S(V) - g(V) = 0, \gamma = 0\}. \quad (3.32)$$

La bornitude des trajectoires est conséquence de la relation $\sigma(V) + h = \text{constante}$. \square

Remarque 3.1. En pratique, la fonction Λ_ρ n'est pas un modèle représentatif de la réalité à faible Mach¹⁰. Il est donc judicieux de poser $\epsilon = W_0 - W_\theta(V, 0)$, en prenant par exemple $V = 600 \text{ m.s}^{-1}$, pour restreindre \mathcal{C} au domaine où le modèle est représentatif de la réalité.

La Figure 3.5 montre les domaines \mathcal{A} et \mathcal{C} pour $V_0 = 2400 \text{ m.s}^{-1}$, et la Figure 3.6 montre ces mêmes domaines dans le cas d'un véhicule subsonique, avec $V_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et $S(V) = 1$, à fin de comparaisons. Comme nous pouvons l'observer, la présence du terme

$$\left(1 - \frac{V^2}{g_0 R_t}\right)^{-a \frac{R_t}{2}} \quad (3.33)$$

dans (3.13), où $a R_t \approx 974$, rend Λ_ρ fortement croissante à grande vitesse. Cette tendance non linéaire du mouvement phugôïde hypersonique est conséquence des possibles variations d'altitude dès la moindre variation d'angle de pente. Elle se retrouve également dans les Figures 2.18 et 2.19, où les oscillations phugôïdes semblent « en dents de scie ».

10. Les propriétés de monotonie de Λ_ρ ne sont pas vérifiées autour de Mach 1, du fait de la singularité de Prandtl-Glauert (mur du son).

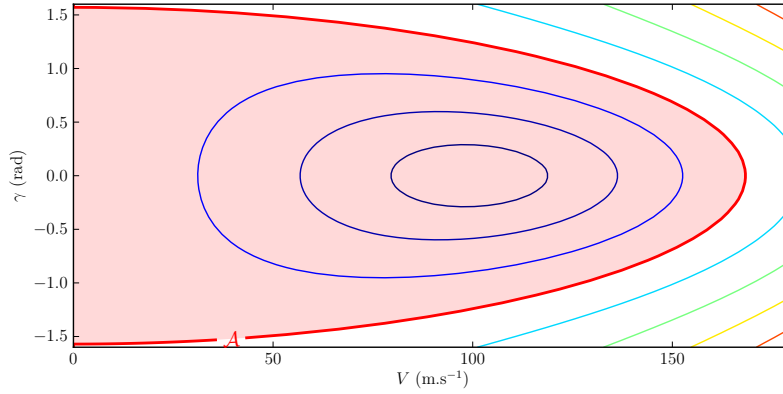


FIGURE 3.6 – Tracé de lignes de niveau de la fonction $W(V, \gamma)$, pour $V_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et $S(V) = 1$. L'ensemble \mathcal{A} , défini par (3.24) est délimité en rouge.

3.5 Extension à un vol à énergie non constante

La conservativité du mouvement phugoïde est une propriété particulièrement intéressante à exploiter pour réaliser une loi de commande. Mais la stabilité de l'équilibre du système n'est pas suffisante pour assurer la stabilisation asymptotique de l'équilibre (h_0, V_0) . C'est une loi de commande poursuivant cet objectif que nous allons étudier dans ce qui suit.

Avant de donner la synthèse complète de la loi de commande, nous ferons une hypothèse supplémentaire puis nous détaillerons séparément différents termes qui seront présents dans la commande.

3.5.1 Modèle de comportement

L'analyse développée à la section précédente suppose l'équilibre aéro-propulsif, impliquant la stabilité du mode énergétique du véhicule. Or, ceci est une hypothèse qui n'a pas de raison d'être maintenue le long du vol, *a fortiori* si le but est de contrôler les trajectoires du véhicule. Par conséquent, nous avons besoin d'un nouveau résultat, au prix d'une nouvelle hypothèse.

Approximation 3.1 (Atmosphère homogène). On suppose la force de portance indépendante de l'altitude. En conséquence, on considère, en lieu et place de Λ_ρ , la fonction $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, définie par

$$\Lambda(V) = \frac{C_{l_a} V^2 S(V) \rho(h_0)}{g(V)}, \quad (3.34)$$

avec C_{l_a} défini par (2.43), $S(V)$ définie par (2.7) et $g(V)$ définie par (3.8).

La conséquence de cette hypothèse est que l'équation de variété (3.12) n'est plus vérifiée. La dynamique de guidage considérée est désormais définie par

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad \dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{g(V)}{V} (\alpha \Lambda(V) - \cos \gamma), \quad (3.35)$$

qui possède une structure triangulaire.

Par ailleurs, l'ensemble \mathcal{C} défini par

$$\mathcal{C} = \{(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W_\theta(V, \gamma) \leq W_\theta(0, 0) - \epsilon\}, \quad (3.36)$$

avec $0 < \epsilon < W_\theta(0, 0)$, est changé en raison de la substitution de Λ_ρ par Λ . Celui-ci est illustré dans la Figure 3.7, pour $V_0 = 2400 \text{ m.s}^{-1}$. En comparaison avec la Figure 3.5, la non-linéarité du modèle pour $V > V_0$ est beaucoup moins marquée.

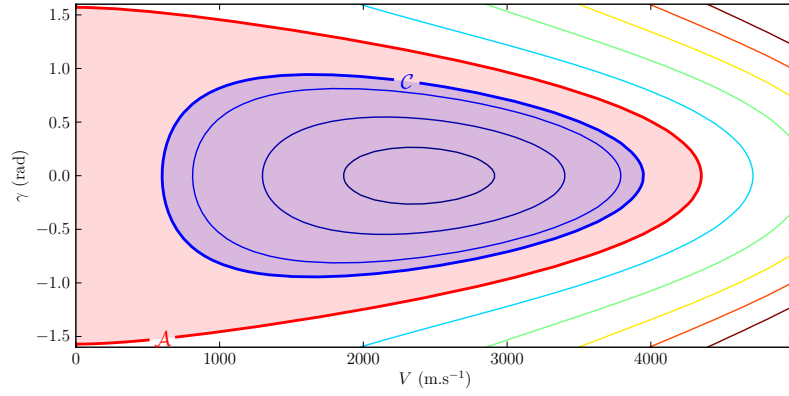


FIGURE 3.7 – Tracé des lignes de niveau de la fonction $W(V, \gamma)$, pour $V_0 = 2400 \text{ m.s}^{-1}$. L'ensemble \mathcal{A} , défini par (3.24) est délimité en rouge. L'ensemble \mathcal{C} , défini par (3.36) est délimité en bleu.

3.5.2 Commande du vecteur vitesse par commande gradient

Comme nous l'avons vu, (3.36) définit un domaine \mathcal{C} sur lequel la fonction

$$W(V, \gamma) = \alpha_0 \int_{V_0}^V \Lambda(s) ds + V_0 - V \cos \gamma \quad (3.37)$$

est strictement positive sauf en $(V_0, 0)$. De plus, nous avons montré l'invariance de W le long des trajectoires lorsque $e = 0$ et $\alpha = \alpha_0$. Cette fonction est donc une candidate idéale pour construire une loi de commande pour la dynamique de guidage. En effet, sa dérivée vérifie

$$\dot{W}(V, \gamma) = \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma \right) e + \Lambda(V)g(V) (\alpha - \Lambda(V_0)^{-1}) \sin \gamma. \quad (3.38)$$

Dans le but de stabiliser asymptotiquement l'équilibre $(V_0, 0)$, le choix le plus simple est de prendre la commande gradient ¹¹

$$e = -k_V \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma \right), \quad \alpha = \alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma. \quad (3.39)$$

Cette commande est proche d'un simple contrôle proportionnel, où k_V et k_γ sont des gains de réglage, strictement positifs. Cependant, puisqu'il nous suffit d'avoir une commande de signe adaptée pour assurer la stabilisation de l'équilibre, il est également possible de mettre en œuvre une commande bornée. Par exemple, nous pouvons choisir

$$e = \text{sat} \left(k_V \left(\cos \gamma - \frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} \right), \underline{e}, \bar{e} \right), \quad \alpha = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right), \quad (3.40)$$

où $s \mapsto \text{sat}(s, \underline{s}, \bar{s})$ désigne n'importe quelle fonction monotone, croissante, à valeurs comprises entre \underline{s} et \bar{s} . Les différents paramètres

$$\underline{e} < 0 < \bar{e}, \quad \underline{\alpha} < \alpha_0 < \bar{\alpha}, \quad (3.41)$$

représentent alors les limites d'excursion de la commande.

Remarque 3.2. L'intérêt principal d'une commande gradient telle que (3.40) est qu'elle assure la stabilisation du point d'équilibre avec $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ comme bassin d'attraction, en exploitant pleinement la plage d'excursion des variables de commande. En comparaison, des lois de commandes plus classiques ne sont applicables que dans le voisinage de l'équilibre où elles sont assurées d'être réalisables.

11. Voir l'Annexe A.

Remarque 3.3. Un autre intérêt de la commande (3.40) est qu'elle nécessite peu d'information *a priori* sur le modèle, ce qui permet de garantir un niveau de robustesse élevé. En effet, de nombreux paramètres de modélisation incertains apparaissent linéairement dans la définition de $\Lambda(V)$ donnée par (3.34). La commande peut donc être implantée par

$$e = \text{sat} \left(k_V \left(\cos \gamma - \frac{V^2 S(V) g(V_0)}{V_0^2 S(V_0) g(V)} \right), \underline{e}, \bar{e} \right), \quad \alpha = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{V^2 S(V)}{V_0^2 S(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right), \quad (3.42)$$

dans laquelle le seul paramètre de modélisation potentiellement mal connu est $S(V)$.

3.5.3 Commande de l'altitude

La commande de l'altitude h est effectuée en étendant la fonction de Lyapunov. Du fait de la structure triangulaire de notre modèle (3.35), structure introduite par l'Approximation 3.1, nous suggérons d'utiliser deux approches différentes : une synthèse par domination utilisant la technique de *forwarding*¹² décrite dans Mazenc et Praly (1996) ; ainsi qu'une synthèse par annulation.

Synthèse par domination

Pour appliquer la technique de *forwarding*, nous devons trouver l'équation d'une variété M vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial M}{\partial h} V \sin \gamma - \frac{\partial M}{\partial V} g(V) \sin \gamma + \frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{g(V)}{V} (\alpha \Lambda(V) - \cos \gamma) = V \sin \gamma. \quad (3.43)$$

Or, en considérant $\frac{\partial M}{\partial h} = 0$ et $\frac{\partial M}{\partial \gamma} = 0$, l'équation de variété devient $\frac{\partial M}{\partial V} = -\frac{g(V)}{V}$, qu'il suffit d'intégrer. Rappelons alors la fonction $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\sigma(V) = \int_0^V \frac{s}{g(s)} ds = -\frac{R_t}{2} (\ln g(V) - \ln g_0), \quad (3.44)$$

avec $g(V)$ définie par (3.8). Considérons alors $\psi_V(h + \sigma(V) - E_0)$, avec $E_0 = h_0 + \sigma(V_0)$ qui s'apparente à un objectif d'énergie totale à mg près, et $\psi_V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction C^1 et définie positive. La dérivée de ψ_V le long des trajectoires vérifie

$$\frac{d}{dt} \psi_V(h + \sigma(V) - E_0) = \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \left(V \sin \gamma + \frac{V}{g(V)} (e - g(V) \sin \gamma) \right), \quad (3.45)$$

$$= \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \frac{V}{g(V)} e(h, V, \alpha, \delta, \eta). \quad (3.46)$$

Elle est ainsi affine en la commande e , c'est-à-dire le bilan aéro-propulsif. Nous pouvons donc stabiliser l'équilibre à une altitude de référence donnée en utilisant la poussée comme vecteur de contrôle de l'énergie totale du véhicule. En effet, considérons la fonction

$$W_1(h, V, \gamma) = W(V, \gamma) + \psi_V(h + \sigma(V) - E_0). \quad (3.47)$$

Sa dérivée, le long des trajectoires de (3.35) vérifie

$$\begin{aligned} \overline{W_1(h, V, \gamma)} &= \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \right) e \\ &\quad + \Lambda(V) g(V) (\alpha - \alpha_0) \sin \gamma. \end{aligned} \quad (3.48)$$

La commande

$$e = \text{sat} \left(-k_V \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \right), \underline{e}, \bar{e} \right), \quad (3.49a)$$

$$\alpha = \alpha_0 - \Lambda(V) g(V) \sin \gamma, \quad (3.49b)$$

stabilise donc un équilibre du système vérifiant $\gamma = 0$ et $h + \sigma(V) = E_0$.

12. Pour une présentation succincte du *forwarding*, voir également la Section 5.4.

Synthèse par annulation

L'utilisation du *forwarding* permet de commander l'altitude, mais dans notre cas, cela mène à un comportement très conservatif car le terme $\psi'_V(h + \sigma(V) - E_0)$ laisse libre les transferts d'énergie entre la vitesse et l'altitude. Cette conservativité est une caractéristique intéressante si notre intérêt est d'économiser de l'énergie, mais cette stratégie de commande est insuffisante pour réguler l'altitude de façon contraignante. Une autre technique de synthèse permet de commander l'altitude de façon moins conservative. En combinant les deux techniques nous pouvons arranger un compromis.

Pour cela, il faut remarquer que $\frac{\partial W}{\partial \gamma}$ est \dot{h} . C'est un facteur qui nous permet une synthèse, par l'annulation d'un objectif de commande sur h , en utilisant α . En effet, considérons le terme $\psi_\gamma(h - h_0)$, où $\psi_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction C^1 et définie positive. Sa dérivée le long des trajectoires est

$$\overbrace{\psi_\gamma(h - h_0)}^\cdot = \psi'_\gamma(h - h_0)V \sin \gamma = \psi'_\gamma(h - h_0) \frac{\partial W}{\partial \gamma}. \quad (3.50)$$

Considérons maintenant la fonction

$$W_2(h, V, \gamma) = W(V, \gamma) + \psi_V(h + \sigma(V) - E_0) + \psi_\gamma(h - h_0). \quad (3.51)$$

Sa dérivée, le long des trajectoires de (3.35) vérifie

$$\begin{aligned} \overbrace{W_2(h, V, \gamma)}^\cdot &= \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \right) e \\ &\quad + \Lambda(V)g(V) \left(\alpha - \alpha_0 + V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} \right) \sin \gamma, \end{aligned} \quad (3.52)$$

ce qui suggère, pour l'incidence, la commande

$$\alpha = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right) - V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}. \quad (3.53)$$

3.5.4 Synthèse finale de la loi de guidage

Pour tirer avantage des différentes approches précédentes, nous les combinons. Pour cela, nous considérons donc la fonction de Lyapunov

$$W_2(h, V, \gamma) = \alpha_0 \int_{V_0}^V \Lambda(s) ds + V_0 - V \cos \gamma + \psi_\gamma(h - h_0) + \psi_V(h + \sigma(V) - E_0), \quad (3.54)$$

avec $E_0 = h_0 + \sigma(V_0)$. Les fonctions ψ_\star sont définies comme

$$\psi_\gamma(s) = \int_0^s \text{sat}(k_{\psi_\gamma} r, \underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha) dr, \quad \psi_V(s) = \int_0^s \text{sat}(k_{\psi_V} r, \underline{E}, \bar{E}) dr. \quad (3.55)$$

Par ailleurs, e étant défini par (2.46) comme

$$e(h, V, \alpha, \delta, \eta) = \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \left(\eta - \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 \right), \quad (3.56)$$

nous devons en déduire une loi de commande sur η .

Nous choisissons la commande (α_c, η_c) définie par

$$\alpha_c = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right) - V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad (3.57a)$$

$$\eta_c = \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 + e_c, \quad (3.57b)$$

où

$$e_c = \text{sat} \left(-k_V \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \right), \eta, \bar{\eta} \right). \quad (3.58)$$

Les gains pour le réglage du correcteurs sont $(k_\gamma, k_V, k_{\psi_\gamma}, k_{\psi_V})$, strictement positifs. Les limites de saturation sont

$$\eta < \min_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 < \max_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 < \bar{\eta}, \quad (3.59a)$$

$$\alpha < \alpha_0 + \min_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} < \alpha_0 + \max_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} < \bar{\alpha}, \quad (3.59b)$$

ainsi que

$$\underline{h}_\alpha < 0 < \bar{h}_\alpha, \quad \underline{E} < 0 < \bar{E}. \quad (3.59c)$$

La proposition qui suit établit la stabilisation de l'équilibre $(h_0, V_0, 0)$ du système (3.35) commandé par (3.57).

Théorème 3.2. *Pour tout couple $(h_0, V_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}$, le système défini par (3.35) et commandé par (3.57) possède un équilibre $(h_0, V_0, 0)$ asymptotiquement stable, avec un bassin d'attraction contenant la composante connexe de l'ensemble*

$$\mathcal{D} = \{(h, V, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W_2(h, V, \gamma) < \bar{W}_2 - \epsilon\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C} \quad (3.60)$$

contenant l'équilibre, avec $W_2 : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par (3.54), $\bar{W}_2 = \alpha_0 + \int_{V_0}^0 \Lambda(s) ds + V_0$, ϵ un réel strictement positif tel que $\epsilon < \bar{W}_2$ et \mathcal{C} défini par (3.36).

Démonstration. Considérons la fonction (3.54). Elle est nulle en $(h_0, V_0, 0)$ et positive partout ailleurs sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S}$. Sa dérivée, le long des trajectoires du système (3.35) commandé par (3.57), vérifie

$$\begin{aligned} \overline{W_2(h, V, \gamma)} &= \frac{\partial W_2}{\partial V} \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \left[\text{sat} \left(-k_V \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \frac{\partial W_2}{\partial V} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \eta, \bar{\eta} \right) - \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 \right] \\ &\quad + \Lambda(V)g(V) \left(\text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \alpha, \bar{\alpha} \right) - \alpha_0 \right) \sin \gamma, \end{aligned} \quad (3.61)$$

avec

$$\frac{\partial W_2}{\partial V} = \frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0). \quad (3.62)$$

D'après les contraintes (3.59), l'équation (3.61) est nécessairement nulle ou négative.

Par ailleurs, l'ensemble \mathcal{D} défini par (3.60) est borné. En effet, W_2 étant composée d'une somme de termes positifs ou nul, pour h fixé l'ensemble des couples (V, γ) vérifiant $W_2(h, V, \gamma) < \bar{W}_2 - \epsilon$ est inclus dans \mathcal{C} , défini par (3.36). De plus, ψ_γ et ψ_V étant radialement non bornées, il existe nécessairement $\bar{h} > 0$ tel que pour tout $(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S}$, nous ayons $W_2(\bar{h}, V, \gamma) \geq \bar{W}_2$ et $W_2(-\bar{h}, V, \gamma) \geq W(0, 0)$.

Par conséquent, \mathcal{D} contient l'origine et est inclus dans $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$. De plus, avec (3.61) \mathcal{D} est positivement invariant. D'après le principe d'invariance, les solutions du système (3.35) commandé par (3.57) et initialisées dans \mathcal{D} convergent vers le plus grand ensemble invariant inclus dans

$$\mathcal{E} = \left\{ (h, V, \gamma) \in \mathcal{D} : \overline{W_2(h, V, \gamma)} = 0 \right\}, \quad (3.63)$$

c'est-à-dire, l'équilibre $(h_0, V_0, 0)$, d'après (3.35) et (3.57). \square

Cette commande (3.57) intègre la commande gradient telle que définie en (3.40), ainsi que des termes d'annulation, qui sont la conséquence de la commande en altitude et de la réalisation du bilan aéro-propulsif par compensation de la traînée. Elle peut être vue comme une version non linéaire d'un contrôle proportionnel pour la régulation de V et proportionnel-dérivé pour la régulation de h . En ajustant les gains k_* , il est possible de placer les pôles du linéarisé tangent du système en boucle fermée de sorte à obtenir un comportement asymptotique identique à celui d'un contrôleur linéaire de structure équivalente mais localement optimal. L'intérêt majeur du contrôleur non linéaire étant l'étendue de son bassin d'attraction.

Remarque 3.4. Étant donné que les différentes limites de saturation décrites par (3.59) peuvent varier dans le temps, il est par ailleurs possible de leur soustraire les termes d'annulation introduits dans la commande. Les contrôles obtenus η et θ peuvent ainsi être globalement bornés, si l'engin évolue dans un domaine tel que les termes de dérive sont bornés et que les contraintes sur les entrées sont choisies de façon à permettre l'équilibrabilité du point de vol — c'est-à-dire l'existence d'une commande, dans les limites d'excursion possible, permettant le maintien de l'équilibre. En effet, en posant

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}^* + \alpha_0 + V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}^* + \alpha_0 + V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad (3.64a)$$

$$\underline{\eta} = \underline{\eta}^* - \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}^* - \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \quad (3.64b)$$

alors on assure que les contraintes

$$\underline{\alpha}^* \leq \alpha \leq \bar{\alpha}^*, \quad \underline{\eta}^* \leq \eta \leq \bar{\eta}^*, \quad (3.65)$$

seront respectées au cours du vol, si les paramètres $(\underline{\alpha}^*, \bar{\alpha}^*, \underline{\eta}^*, \bar{\eta}^*)$ sont correctement dimensionnés. Pour cela, il suffit que l'excursion possible des commandes η et α permette de réaliser le point d'équilibre $(h_0, V_0, \gamma = 0)$, avec suffisamment de marge pour assurer la stabilité de l'équilibre sur un domaine défini dès la conception ; c'est-à-dire

$$\underline{\eta}^* < \min_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \quad \bar{\eta}^* > \max_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \quad (3.66a)$$

$$\underline{\alpha}^* < \alpha_0 + \min_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad \bar{\alpha}^* > \alpha_0 + \max_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}. \quad (3.66b)$$

3.6 Pilotage par backstepping

La commande du mode phugôide suppose que l'incidence α soit directement disponible en tant que commande. En réalité, α est elle-même la sortie d'un système dynamique, en l'occurrence un oscillateur. Du fait de la structure triangulaire du système, qui montre une hiérarchie de commande, nous proposons donc de rendre α convergente vers $\alpha_c(h, V, \gamma)$ définie par l'équation (3.57a) pour stabiliser l'équilibre du système complet. Le *backstepping*, défini dans Krstic et al. (1995), permet d'étendre notre loi de commande à cette fin étant donnée la hiérarchie de contrôle *gouvernes* \rightarrow *tangage* \rightarrow *attitude*. Cette technique a déjà été mise en œuvre dans plusieurs travaux dans le domaine aéronautique ; citons par exemple Thiele (1999) ; Harkegard et Torkel Glad (2000) ; Fiorentini et al. (2009) ; Poulain et al. (2010).

Reprenons le modèle (3.1) et considérons la dynamique de rotation

$$\dot{\theta} = q, \quad \dot{q} = \frac{1}{2J} \rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_m(\alpha, \delta), \quad (3.67)$$

ainsi que la fonction de Lyapunov (3.54). Sa dérivée le long des trajectoires est

$$\overbrace{W_2(h, V, \gamma)}^\cdot = \overbrace{W_2(h, V, \gamma)}^\cdot \Big|_{\alpha=\alpha_c} + g(V) \Lambda(V) (\theta - \gamma - \alpha_c) \sin \gamma. \quad (3.68)$$

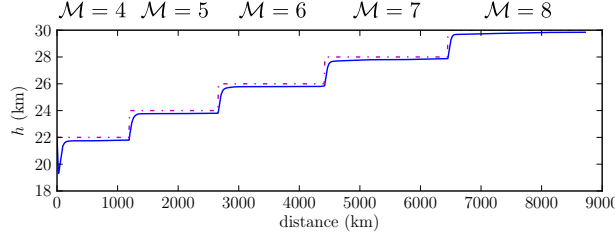


FIGURE 3.8 – Trajectoire simulée durant le vol. Il s’agit d’une succession de paliers stabilisés à altitude et vitesse constante. Le véhicule contrôlé suit la trajectoire de référence (en traits d’axe) sur plus de 8000 km.

À partir de là, en étendant la fonction (3.54) comme

$$W_3(h, V, \gamma, \theta) = W_2(h, V, \gamma) + \frac{1}{2}(\theta - \gamma - \alpha_c)^2, \quad (3.69)$$

sa dérivée est

$$\overbrace{W_3(h, V, \gamma, \theta)}^{\cdot} = \overbrace{W_2(h, V, \gamma)}^{\cdot} \Big|_{\alpha=\alpha_c} + (\theta - \gamma - \alpha_c) (g(V)\Lambda(V) \sin \gamma + q - \dot{\gamma} - \dot{\alpha}_c). \quad (3.70)$$

Si nous sommes capables d’assurer la convergence de q vers

$$q_c = -\text{sat}(k_q(\theta - \gamma - \alpha_c), q, \bar{q}) + \dot{\gamma} + \dot{\alpha}_c - g(V)\Lambda(V) \sin \gamma, \quad (3.71)$$

alors l’équilibre du sous-système (h, V, γ, θ) sera stable. Ceci constitue la première étape de *backstepping*. L’étape suivante est la stabilisation de l’équilibre du système complet. En définissant la fonction de Lyapunov

$$W_4(h, V, \gamma, \theta, q) = W_3(h, V, \gamma, \theta) + \frac{1}{2}(q - q_c)^2, \quad (3.72)$$

sa dérivée le long des trajectoires vérifie

$$\overbrace{W_4(h, V, \gamma, \theta, q)}^{\cdot} = \overbrace{W_3(h, V, \gamma, \theta)}^{\cdot} \Big|_{q=q_c} + (q - q_c) \left(\theta - \gamma - \alpha_c + \frac{1}{2J} \rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_m(\alpha, \delta) - \dot{q}_c \right). \quad (3.73)$$

Finalement, une loi de commande qui stabilise l’équilibre désiré de notre véhicule décrit par (3.1) est

$$\delta = -\text{sat}(Q, \bar{\delta}, \delta) - \frac{C_{m0}(\alpha)}{C_{m\delta}(\alpha)} + (\dot{q}_c + \alpha_c + \gamma - \theta) \frac{2J}{\rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_{m\delta}(\alpha)}, \quad (3.74)$$

avec $Q = \frac{k_\delta}{2J} \rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_{m\delta}(\alpha) (q - q_c)$.

3.7 Simulations et discussion

3.7.1 Le modèle de simulation

La simulation est réalisée en utilisant le contrôleur (3.74). Rappelons que le véhicule simulé possède un rapport poussée/masse d’environ 3 à Mach 8 et une finesse d’environ 3,7 dans ces conditions. La masse initiale du véhicule est de 5 tonnes, dont près de la moitié (2350 kg) est du carburant. Tout l’état est mesuré, et les mesures de l’état sont supposées parfaites.

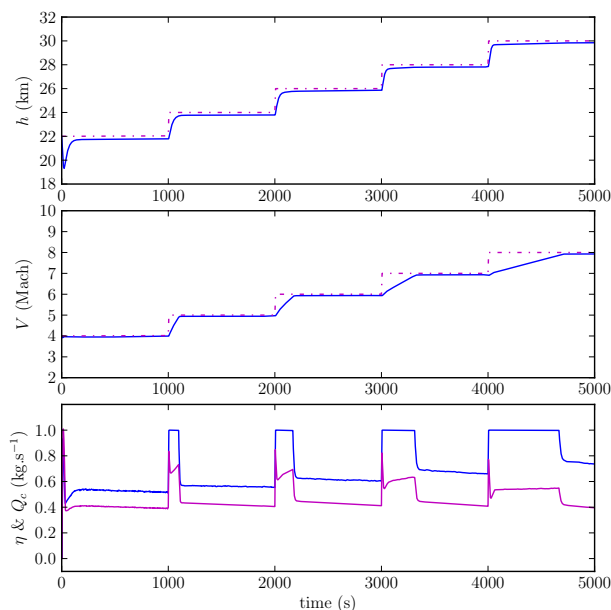


FIGURE 3.9 – Simulation : convergence de h et V vers la consigne. La commande en poussée est saturée à sa valeur maximale à chaque fois que le véhicule doit réaliser une accélération pour poursuivre la référence. À η constant, la quantité de carburant injectée (courbe magenta en trait plein) dépend en permanence de l'incidence du véhicule.

En ce qui concerne les actionneurs, les gouvernes sont simulées par le système dynamique (2.4). La dynamique du débit de carburant est négligée. La simulation prend en compte l'ensemble des connaissances discuté dans le Chapitre 2, y compris les phénomènes mal connus (poussée asymétrique, variation des masses), modélisés sur des considérations empiriques. L'aérodynamique du véhicule est donnée par un modèle polynomial, et la simulation de la propulsion est faite selon le modèle présenté à la Section 2.5.

Les différences existantes entre le modèle de comportement et le modèle de simulation participent à la méconnaissance générale que nous avons des paramètres de modélisation du véhicule. De plus, nous avons introduit une large dispersion sur le modèle pour rendre compte de la robustesse de notre loi de commande à une mauvaise connaissance de l'aérodynamique du véhicule. Ainsi, dans la condition d'un palier stabilisé à Mach 8 et à 30 km, les erreurs suivantes sont présentes :

- le moment aérodynamique qui sert de modèle au contrôleur est prédit avec un facteur entre 0,8 et 1,5 comparé au moment utilisé dans le modèle de simulation ;
 - les coefficients de portance sont modélisés environ 70% au delà de leur valeurs relevées en simulation ;
 - la propulsion est modélisée environ 50% au delà de la valeur relevée en simulation.
- Dans l'implantation de la commande, la caractéristique $\Phi_i I_{sp}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$ est approchée par une fonction linéaire.

3.7.2 Croisière à différents paliers

La Figure 3.8 montre la trajectoire du vol simulée utilisant la loi de commande (3.74). Cette trajectoire consiste en une succession de paliers (h_0, V_0) . Le même contrôleur est utilisé durant toute la phase de vol. La convergence de l'altitude et de la vitesse dans le temps est présentée à la Figure 3.9, où on peut constater que la propulsion est mise à contribution à son maximum dès que nécessaire. Ainsi, on peut limiter la poussée dans une plage de fonctionnement qui garantit l'intégrité du superstatoréacteur, sans diminuer les performances asymptotiques du système. De larges incertitudes ayant été maintenues entre les différents modèles, des erreurs de poursuite significative existent,

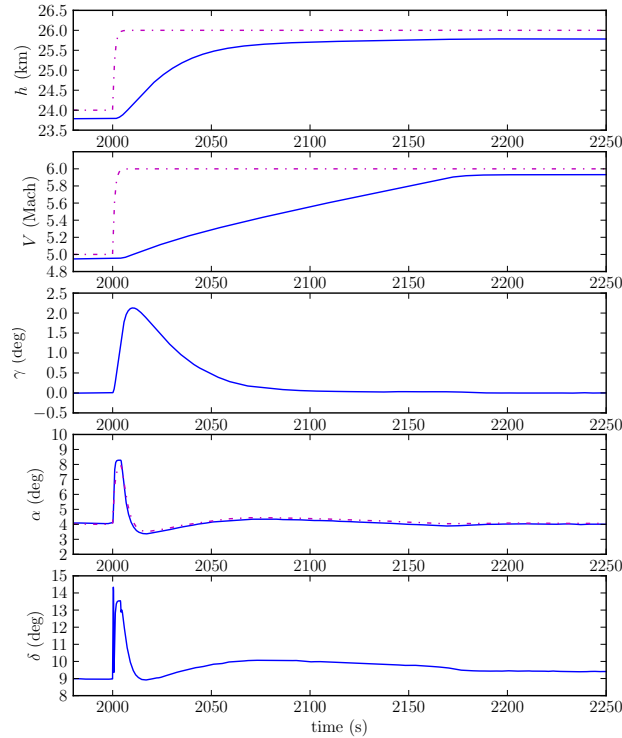


FIGURE 3.10 – Simulation : zoom sur un changement de consigne de point de vol. La convergence de l’altitude est plus rapide que la convergence de la vitesse vers la consigne. La consigne intermédiaire en incidence ne dépasse pas une valeur limite proche de 8° .

sans pour autant affecter la propriété de stabilité de l’équilibre du système. Ainsi, l’erreur de poursuite sur la consigne en altitude est proche de 250 m, tandis que l’erreur de poursuite sur la vitesse est de l’ordre de $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La Figure 3.10 montre plus en détail le comportement du véhicule sujet à un changement de consigne en altitude et en Mach, rencontré à $t = 2000 \text{ s}$. Pour rallier la consigne en altitude, la prise d’incidence est significative, mais reste tout de même limitée à une valeur maximale durant l’ascension, ici 8° . Cette borne est ici donnée arbitrairement, mais a pour sens de permettre une limitation liée aux flux thermiques, au facteur de charge, ou afin de protéger l’entrée d’air pour qu’elle ne soit pas exposée à un flux d’air trop important.

3.7.3 Sensibilité à l’augmentation de poussée

La Figure 3.11 montre un résultat de simulation où deux changements de consigne en Mach sont réalisés, à altitude constante. Le but est d’observer la conséquence sur le guidage/pilotage d’une augmentation de la poussée.

On remarque assez peu la conséquence du « moment piqueur » induit par la poussée : toutes choses égales par ailleurs, la valeur de gouverne à l’équilibre est peu différente pour une augmentation de la propulsion commandée de 60% à 100%.

Les variations locales d’incidence durant les quelques secondes suivant le changement de consigne, que l’on retrouve sur la consigne α_c de la loi de guidage, ne sont pas une conséquence d’un moment piqueur. Il s’agit plutôt d’une conséquence de la méconnaissance des paramètres de modélisation. Pour mettre en évidence ce constat, nous avons commandé successivement deux changements de consigne : un échelon de Mach 7 à Mach 7,05 au temps $t = 0$, puis un échelon de Mach 7,05 à Mach 8 au temps $t = 100 \text{ s}$. On constate que, alors que les conditions de sollicitation du pilote sont proches entre les

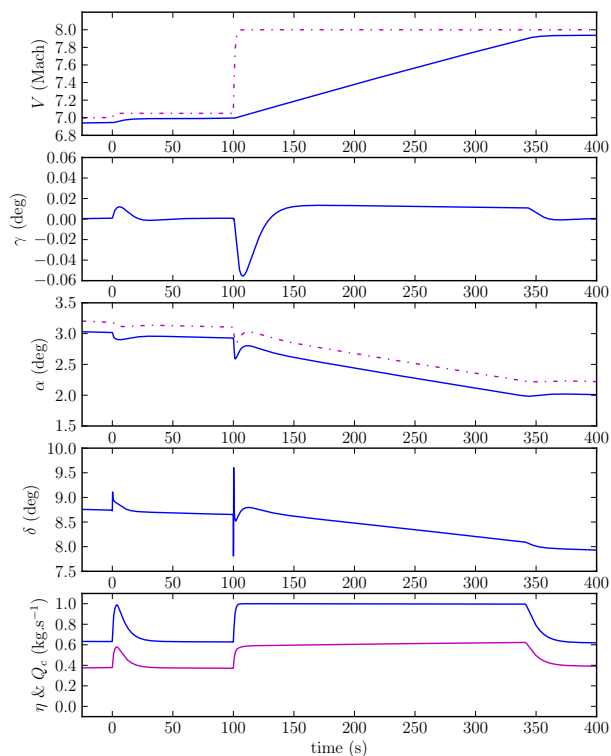


FIGURE 3.11 – Simulation : zoom sur un changement de consigne en Mach. On note que l'influence de l'augmentation de la poussée sur l'incidence du véhicule demeure faible. En pratique, elle est dominée par d'autres effets provenant des erreurs de modélisation.

deux changements de consigne, la conséquence sur le pilotage est de nature différente.

Le vol étant effectué à altitude constante, l'incidence décroît progressivement, à partir de $t = 110$ s et au fur et à mesure que V augmente, jusqu'à convergence de V dans un voisinage de la consigne.

3.7.4 Sensibilité aux conditions initiales

La Figure 3.12 montre le résultat de différents tirages en faisant varier les conditions initiales pour une consigne de vol en palier stabilisé à Mach 8 à l'altitude de 30 km. Les conditions initiales sont tirées aléatoirement dans les limites suivantes :

- l'altitude entre 28 et 32 km ;
- la vitesse entre 2200 et 2600 m.s^{-1} ;
- la pente de vitesse entre $\pm 0,05$ rad ($\pm 2,8^\circ$) ;
- l'incidence entre 0 et 0,15 rad ($8,6^\circ$) ;
- la vitesse de rotation entre $\pm 0,05$ rad.s^{-1} ($\pm 2,8^\circ.\text{s}^{-1}$).

Certaines valeurs initiales sont particulièrement élevées, dans le but principal d'illustrer ce comportement éloigné de l'objectif de vol de croisière.

Pour assurer un balayage maximal du volume concerné, un tirage dit « orthogonal » est réalisé. Il s'agit de découper l'espace en hypercubes puis de tirer un point dans chacun. De la sorte, chaque hypercube considéré est échantillonné de façon équiprobable. En l'occurrence, un tirage est réalisé dans chaque portion de l'espace, pour un total de 32 tirages.

On remarque en premier lieu que l'ensemble des solutions converge vers un équilibre proche de la consigne. Le temps de convergence est plus ou moins long, selon l'accélération nécessaire pour atteindre le point de vol.

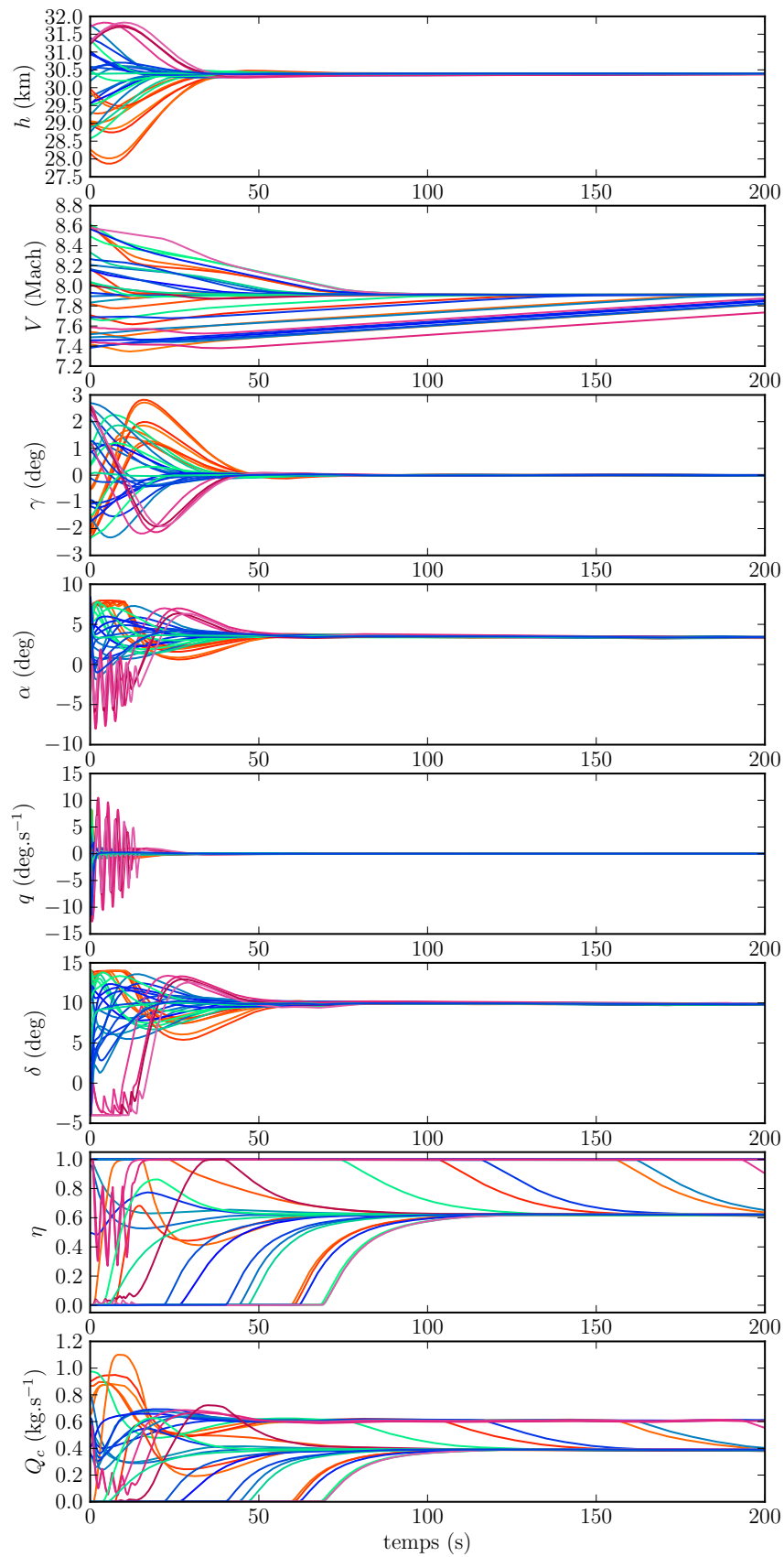


FIGURE 3.12 – Simulation : tirages Monte-Carlo sur les conditions initiales. Les trajectoires convergent toutes, mais les tirages ayant de fortes oscillations sont hors de contrôle.

En ce qui concerne la commande en vitesse, on peut vérifier que celle-ci s'effectue dans le respect de contraintes sur le taux de poussée. On remarque aussi que, au delà de 50 s de vol, le débit de carburant injecté pour un taux de poussée donné est relativement constant au cours de la trajectoire. C'est notamment une conséquence du modèle de captation d'air (2.18), dont le comportement est dominé par l'incidence α et la masse volumique de l'air $\rho(h)$. En effet, le véhicule ayant une altitude et une incidence stabilisées pour chaque tirage à partir de 50 s de vol, il est logique que le rapport Q_c/η devienne quasi-constant.

En ce qui concerne la commande en altitude, on peut vérifier que celle-ci s'effectue avec des prises d'incidences limitées. Ceci apparaît même à l'occasion de valeurs initiales particulièrement éloignées de l'équilibre, pour autant que ces dernières soient équilibrables. Cette contrainte de conception que nous posons au niveau du guidage en vue de préserver l'intégrité du véhicule est donc vérifiée par notre contrôleur.

Lorsque la pente de vitesse et l'écart d'altitude sont fortement négatives¹³, la commande introduit une prise d'incidence nécessaire pour rattraper la chute, mais en conservant celle-ci dans le domaine d'excursion autorisé. Ce cabrage corrige assez rapidement la chute, jusqu'à ce que la pente de vitesse soit suffisamment positive pour corriger l'altitude. On remarque dans cette situation que, pendant toute la période où la prise d'incidence sature, le braquage des gouvernes est amené près de sa limite d'excursion.

Il y a également des configurations qui sont en limite d'être équilibrées par le véhicule. Celles-ci¹⁴ amènent les gouvernes en état de saturation, situation dans laquelle le véhicule évolue en boucle ouverte, avec de fortes oscillations sur la dynamique de rotation. Cette situation — ici temporaire — est périlleuse pour le véhicule, mais son étude — relevant de la caractérisation du domaine d'équilibrabilité et de sécurité du véhicule — sort du périmètre de nos travaux. Nous pouvons néanmoins faire l'observation suivante. Dans la mesure où l'incidence et le braquage des gouvernes sont très liées lorsque le véhicule est à l'équilibre, limiter au sein du contrôleur les prises d'incidences augmente le domaine d'excursion nominale du véhicule commandé.

3.7.5 Sensibilité aux paramètres de modélisation

La Figure 3.13 montre le résultat de différents tirages en faisant varier des paramètres de modélisation pour une consigne de vol en palier stabilisé à Mach 8 à l'altitude de 30 km. Les paramètres de modélisation variables sont les suivants :

- le coefficient de traînée ;
- le coefficient de portance ;
- le coefficient de moment aérodynamique ;
- la surface d'air captée ;
- l'impulsion spécifique du moteur.

Chacun des paramètres subit une variation de $\pm 30\%$. Il ne s'agit pas ici d'évaluer l'ensemble des possibilités de configurations possibles qui peuvent affecter le fonctionnement du véhicule. Le volume de configurations balayé ici est simplement de nature à illustrer les propriétés de robustesse du contrôleur.

Comme dans le cas précédent, un tirage orthogonal est réalisé. L'espace est découpé en hypercubes, puis un point est tiré dans chaque hypercube, pour un total de 32 tirages.

On remarque en premier lieu que la plupart des solutions convergent vers un équilibre proche de la consigne. Ces trajectoires convergent chacune vers un équilibre stable, défini par une altitude et une pente de vitesse.

Les quelques trajectoires qui ne convergent pas vers la consigne, divergent au niveau de la vitesse de croisière. En fait, il apparaît clairement que celle-ci sature totalement la poussée disponible. Le véhicule n'est donc potentiellement pas équilibrable au point de vol commandé. C'est une situation qui peut logiquement arriver du fait du tirage Monte-Carlo auquel nous avons procédé : le véhicule peut effectivement se trouver de façon concurrente avec une traînée augmentée, une poussée diminuée, voire même avec une

13. Cette situation est observable sur les tirages orangés.

14. Cette situation est observable sur les tirages violacés.

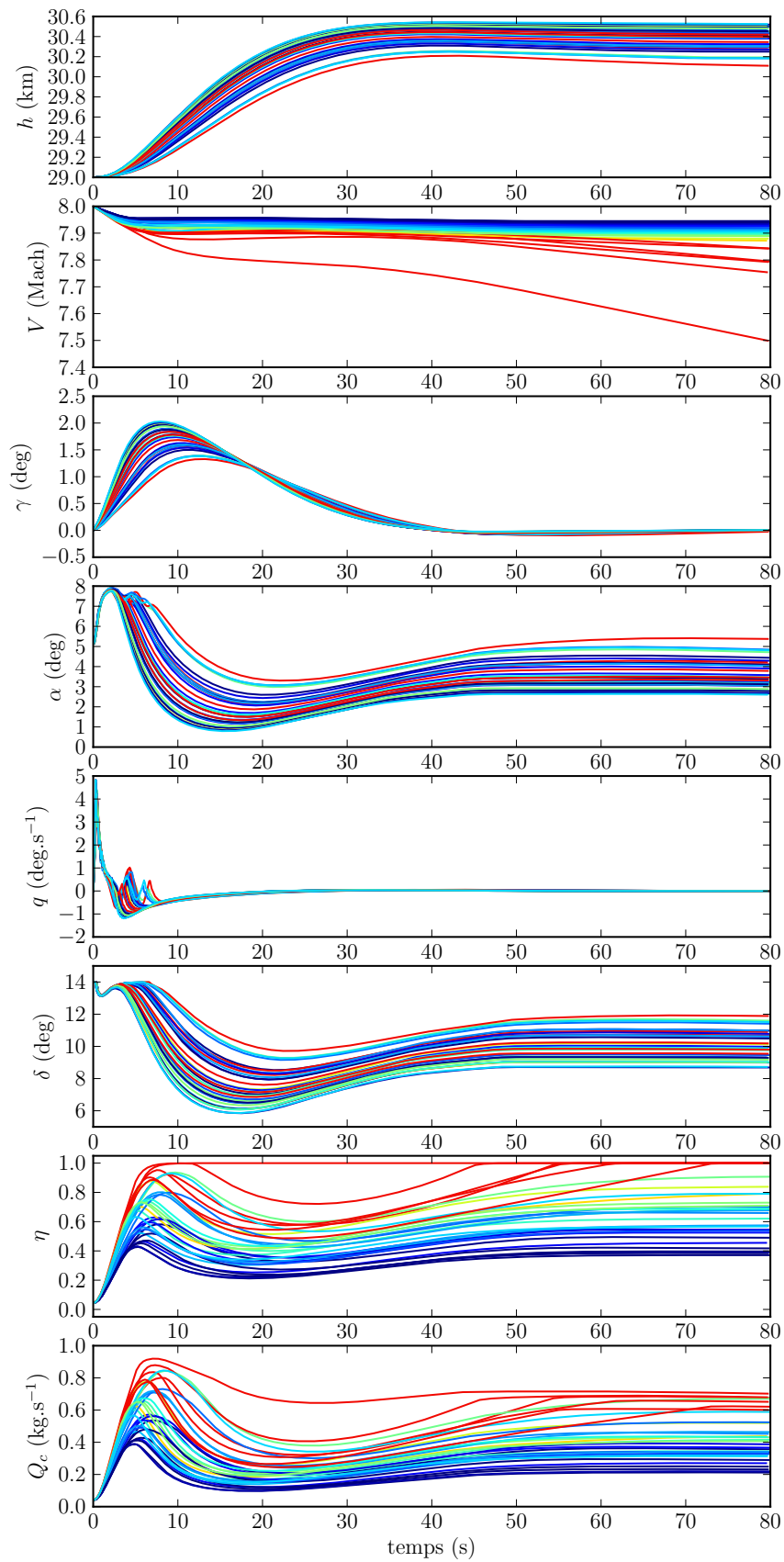


FIGURE 3.13 – Simulation : tirages Monte-Carlo sur les paramètres de modélisation. Les tirages qui ne convergent pas sont ceux qui ne sont pas équilibrables : à poussée maximale, le véhicule décélère en deçà de la consigne.

portance réduite impliquant des prises d'incidence plus élevées pour équilibrer l'altitude. Comme nous l'avons rappelé, l'objectif de ce test n'est pas de passer au crible un ensemble de scénarios probables mais d'illustrer les propriétés de robustesse du contrôleur.

On remarque ensuite une dispersion sensiblement élevée des équilibres stabilisés. Ainsi, l'altitude et la vitesse présentent une erreur de poursuite par rapport à la consigne. Ce fait est caractéristique d'un système commandé de façon « proportionnelle », lorsqu'apparaissent des erreurs de modélisation. Ce manque de robustesse a motivé les développements faits au Chapitre 5, dont l'objet est l'étude de la régulation asymptotique robuste à l'aide d'un terme intégral supplémentaire ajouté à notre commande.

En fait, des erreurs de modélisation sont déjà présentes dans notre cas, du fait de la réduction de complexité entre le modèle de comportement et le modèle de simulation. Il n'y a donc pas besoin de faire varier artificiellement les paramètres pour faire apparaître des erreurs de poursuite (voir sous-section 3.7.2). Mais cette variation supplémentaire met en évidence le phénomène à plus large échelle.

3.7.6 Désamorçage d'entrée d'air

Présentation

Nous avons insisté dans le Chapitre 2 sur l'importance de piloter le véhicule en tenant compte d'une limite sur la combustion, donc sur la poussée, afin de minimiser les risques de désamorçage d'entrée d'air. Cependant, inspiré par les travaux de Bolender et al. (2009), il semble intéressant de tester notre loi de commande dans le contexte décrit par les auteurs. L'hypothèse est donc faite qu'un désamorçage se produit pendant le vol de croisière. Pendant un tel désamorçage, on peut supposer qu'il n'y aura pas ou peu de combustion, résultant en une perte de poussée. On peut également espérer qu'en commandant le véhicule sur une trajectoire dégradée dédiée, alors on pourrait hypothétiquement réamorcer l'entrée d'air pour redémarrer une croisière nominale.

C'est cette capacité à conserver la commandabilité du véhicule qu'on souhaite illustrer ici. Bien sûr, nous ne disposons d'aucune expérience qui nous permette d'établir avec certitude les conséquences d'un tel scénario, l'intérêt est plutôt de mettre en évidence des comportements possibles du véhicule dans ce cas de figure.

Modélisation

Le désamorçage est provoqué par la progression en avant des chocs internes à la propulsion, due à une élévation de la pression en aval. En fait le superstatoréacteur possède un dégagement de chaleur maximal, au delà duquel la combustion peut générer une obstruction, dite « obstruction thermique », pouvant provoquer un blocage de l'écoulement amont. Dans ce cas, l'air ne pénètre plus dans le moteur : l'entrée d'air se désamorce.

Il résulte en une augmentation significative de la pression d'entrée d'air, de sorte que le véhicule subit une augmentation de portance appliquée sur l'avant du corps, ce qui lui relève le nez. La portance et la traînée sont donc augmentées de façon significative, provoquant une impulsion forte sur la dynamique longitudinale du véhicule. Par ailleurs, des simulation numériques présentes dans Bolender et al. (2009) laissent supposer, du fait la modification de l'écoulement autour du véhicule, une réduction significative de $\frac{\partial C_m}{\partial \delta}$ ainsi qu'une réduction (voir une inversion locale) de $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$. Cette dernière a pour effet de réduire la marge de stabilité du mode rapide, alors que la réduction de $\frac{\partial C_m}{\partial \delta}$ a plutôt pour effet de réduire le domaine d'équilibrabilité de l'appareil.

Les effets pris en compte dans notre simulation sont donc les suivants :

- extinction totale de la propulsion ;
- augmentation globale de la portance de 13% ;
- augmentation globale de la traînée de 23% ;
- décalage négatif du couple ;
- réduction du $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$ de 45% ;
- réduction du $\frac{\partial C_m}{\partial \delta}$ de 45%.

Les chiffres sont choisis pour illustrer deux principaux comportements à attendre en simulation : la perte de l'équilibrabilité de la dynamique de rotation, puis celle du mode phugoïde.

Simulation

La simulation est présentée Figure 3.14. Les cinquante premières secondes correspondent à un vol normal initié depuis un point proche de l'équilibre, le désamorçage intervient à la cinquantième seconde.

Dans une première phase, l'engin est perturbé du fait de l'impulsion de force violente reçue au niveau de l'entrée d'air. Il n'équilibre plus son incidence à cause de la limite d'excursion de gouvernes, alors saturées. Du fait de cette saturation, des oscillations rapides (0,2 Hz) se produisent, ce qui est la réponse normale de ce type de véhicule, en boucle ouverte. Par ailleurs, remarquons que pendant cette période, le véhicule perd de l'altitude qu'il recouvrera une fois équilibré. Ce recouvrement pourrait tout à fait ne pas être possible, en fonction des marges prévues à la conception aérodynamique de l'engin.

Dans une seconde phase, on constate essentiellement l'effet de la perte de vitesse. Celle-ci induit une augmentation progressive de l'incidence nécessaire à l'équilibre. Après trois cent cinquante secondes environ, le contrôleur sature la consigne d'incidence, parce que la vitesse devient trop faible pour permettre l'équilibrage de l'engin à cette altitude. À supposer que l'incidence soit maintenue à son maximum, la suite devrait être une descente phugoïde amortie, mais notre modèle de simulation n'est pas considéré réaliste pour des valeurs de Mach inférieur à 3.

Globalement, on peut donc considérer que le contrôleur atténue correctement le phénomène, du fait de sa robustesse. Le principal phénomène qui pourrait le rendre manifestement défectueux serait d'inverser soit le signe de C_{l_a} , soit le signe de $\frac{\partial C_m}{\partial \delta}$. Ces deux paramètres sont essentiels car ils déterminent le *sens* de la commande. En revanche, en fonction de l'effet du désamorçage sur l'aérodynamique du véhicule, il se peut tout à fait que la consigne sorte du domaine équilibrable ; cette situation est même inévitable à long terme, du fait de la perte de vitesse induite par la perte de la propulsion.

Pour pallier les problèmes induits par le désamorçage d'entrée d'air, il conviendrait probablement de détecter la situation de désamorçage ; corriger en urgence la consigne du pilote pour rendre la trajectoire suivie équilibrable ; puis corriger la consigne de guidage pour placer le véhicule sur une hypothétique trajectoire qui soit propice au redémarrage de l'entrée d'air. Ces décisions devant raisonnablement être déléguées à un système de navigation plutôt qu'un simple pilote.

3.8 Conclusion

Ce Chapitre détaille la première approche suivie au cours de nos travaux dédiés à l'étude de la synthèse de commande des HSV sur une trajectoire de croisière, à partir des considérations de modélisation effectuées au Chapitre 2. Notre méthodologie s'appuie sur une analyse du mode phugoïde, faite sous des hypothèses que nous avons discutées. Le point de vue alors adopté est de considérer le vol comme un mouvement dissipatif, dans le but de réaliser une commande gradient.

Les commandes gradients offrent de très bonnes propriétés de robustesse, sans avoir recours à des méthodes de type « grand gain ». Nous arrivons à ce résultat du fait que ce type de commande tire fortement parti de la structure de notre modèle. En effet, là où beaucoup de lois de commande cherchent en fait à dominer ou annuler la totalité du comportement (non linéaire) de dérive des modèles, nous pensons qu'il y a un intérêt à comprendre et exploiter les propriétés de notre modèle — en particulier la dissipativité de la phugoïde. Par ailleurs, et contrairement à une logique qui mène généralement à des systèmes commandés à dynamique linéaires, il apparaît que la non-linéarité du système commandé est une *propriété clé* à exploiter dans la commande afin d'obtenir des résultats de stabilité sous contraintes d'état ou d'entrées.

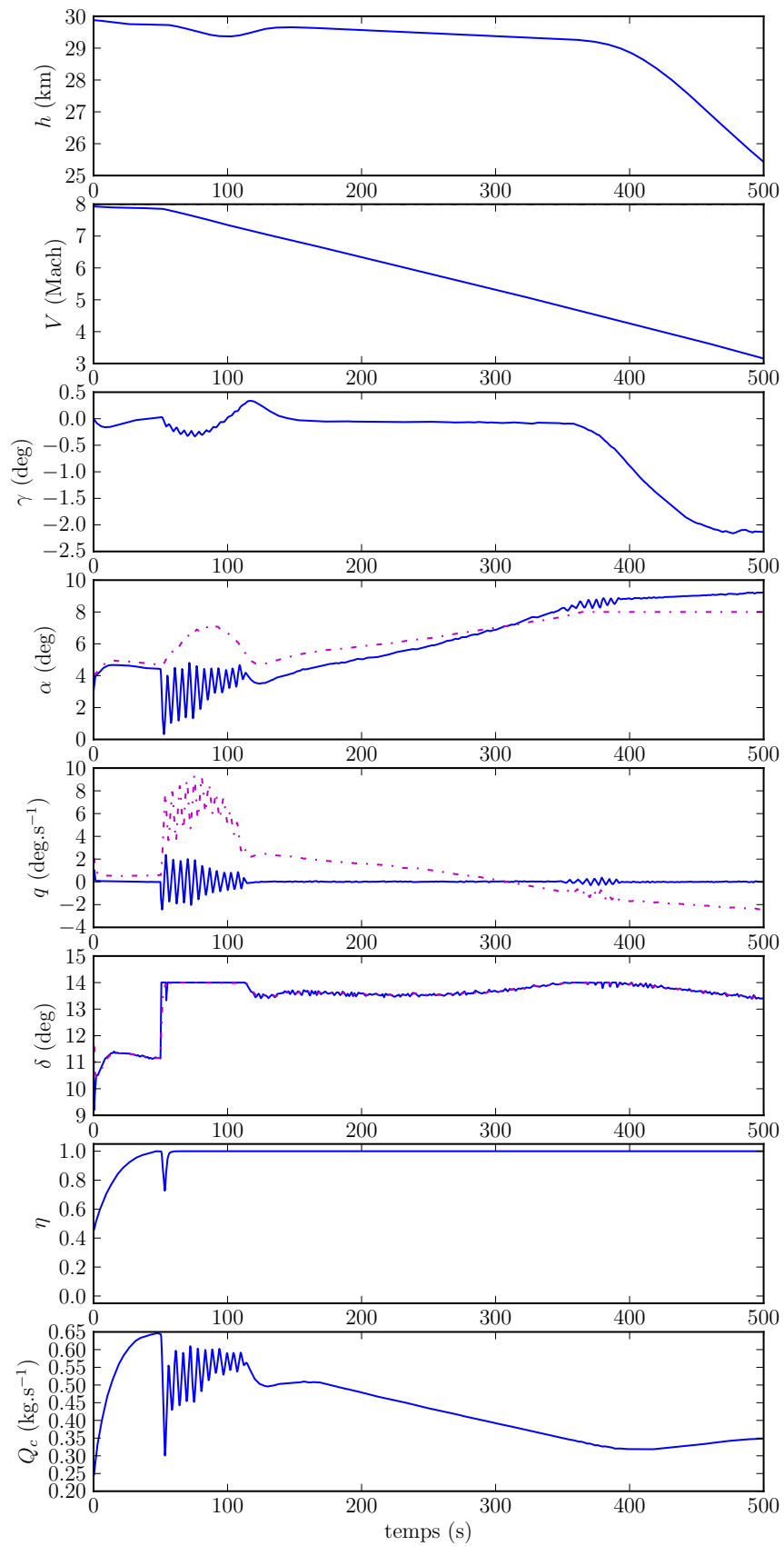


FIGURE 3.14 – Simulation : scénario hypothétique de désamorçage d'entrée d'air.

Ainsi, le résultat à ce stade est une loi de commande non linéaire qui permet d'assurer une propriété de stabilité sur un domaine qui couvre le domaine de vol du véhicule. Cette loi de commande agit directement sur les actionneurs de « bas niveau » du véhicule, ainsi elle accomplit simultanément l'effort de guidage et celui de pilotage, en poursuivant le seul objectif de stabilisation d'un vol de croisière.

Des simulations réalisées dans différentes configurations illustrent les qualités et les limites de la loi de commande proposée. Après avoir soumis notre véhicule à une trajectoire de test, nous avons mis en œuvre des tirages pour différentes situations d'initialisation et de dispersion de modèle afin de tester un maximum de situations possibles. Nous avons également testé le fonctionnement du contrôleur dans un hypothétique scénario de désamorçage d'entrée d'air. Le contrôleur fonctionne selon nous de façon satisfaisante dans l'ensemble des configurations testées.

Pour arriver à ce résultat, une part de la complexité de la propulsion, et une approche globale de la structure de l'aérodynamique du véhicule sont directement prises en compte au niveau du contrôleur. Les principales difficultés que nous souhaitions prendre en compte étaient alors au niveau de la robustesse de la commande, du respect de contraintes physiques, de l'embarquabilité de la commande, et du sens physique qu'on peut lui donner.

Le problème de robustesse posé par les incertitudes de modélisation

La façon dont nous avons choisi de rendre robuste notre contrôleur consiste en une désensibilisation de notre loi de commande par rapport aux incertitudes, en réduisant tant que possible le nombre de paramètres de modélisation embarqués dans la loi de commande. C'est vrai en particulier pour la loi intermédiaire de guidage (3.57), qui assure la stabilisation de l'équilibre du mode phugoïde sans reposer sur une connaissance totale des phénomènes en jeu.

Le respect des contraintes sur l'état et les entrées du véhicule

La commande est effectuée le long des trajectoires en respectant les bornes sur l'incidence et sur la poussée. Nous ne disposons pas à ce jour de résultat de stabilité semi-globale respectant des bornes sur les gouvernes, mais un premier pas est franchi dans la mesure où il est possible, en saturant l'incidence, de vérifier que la consigne intermédiaire d'attitude demeure dans le domaine équilibrable du véhicule.

L'embarquabilité d'une commande non linéaire

La loi de commande obtenue reste assez simple comparée aux propriétés qu'elle offre, ce qui est important pour permettre d'embarquer le contrôleur en pratique. De plus, ce contrôleur offre beaucoup de degrés de liberté, ce qui permet de façonner localement son comportement, par exemple en l'identifiant localement à une structure de contrôleur dont les gains seraient synthétisés par optimisation. En revanche, la commande proposée nécessite une mesure complète de l'état.

La question du sens physique donné à la commande

À l'image de la façon dont les pilotes humains commandent un vol de croisière, la méthode par rétropropagation (*backstepping*) associée à la consigne d'incidence exploite une « hiérarchie » de contrôle donnée par l'enchaînement *gouvernes* → *tangage* → *attitude* → *pente de vitesse* → *altitude*. Cette hiérarchie, intuitive au regard de la mécanique du vol, se traduit dans notre modèle par une structure triangulaire.

3.9 Perspectives

À ce stade, cette loi de commande possède trois principales limites.

D'une part, nous devons étendre cette stratégie de commande à un vol à six degrés de liberté (DDL). Nous verrons que cette extension peut être réalisée au niveau du

guidage, avec la contrainte imposée d'un vol non dérapé, inhérente à la classe de véhicule considérée. Cette extension est examinée en détail dans le Chapitre 4.

D'autre part, en dépit des propriétés de robustesse obtenues, la commande de notre mode phugoïde n'assure pas une convergence asymptotique des signaux mesurés vers la consigne désirée. Ce manque de robustesse quantitative a donc motivé les développements faits au Chapitre 5 dans le but de pallier ce manque à l'aide d'un terme intégral supplémentaire ajouté à notre commande.

Enfin, le *backstepping* tel que pratiqué ici réintroduit une certaine complexité, au travers des termes de dérivées, et ceux-ci reposent sur des éléments de modèle mal connus. De plus, notre pilote ne tire pas profit de la potentielle dissipativité de la dynamique de rotation, et de ce fait il ne permet pas, tel que nous l'employons, de conclure sur le comportement du véhicule, sous une contrainte de saturation des gouvernes. Or ce résultat important nous semble atteignable dans le cas d'un véhicule disposant d'une marge statique garantissant la stabilité en boucle ouverte. En effet, en fonction du dimensionnement relatif des gouvernes par rapport au véhicule considéré, si celui-ci permet de perturber singulièrement le modèle, nous devrions pouvoir synthétiser une commande hiérarchique exploitant la dissipativité de la dynamique de rotation. Cette étude reste cependant à mener.

Par ailleurs, poursuivre cette étude sur un modèle de comportement toujours plus proche de la réalité présente un intérêt théorique pour l'étude du vol et un intérêt pratique pour la synthèse de commande. Parmi les extensions possibles pour des travaux futurs, nous pouvons notamment suggérer les points suivants.

- Reprendre l'étude et la synthèse de loi de commande avec une hypothèse d'atmosphère hétérogène, c'est-à-dire revenir sur l'Approximation 3.1. L'atmosphère a en effet une influence majeure sur les propriétés du vol au niveau global, et sa prise en compte est nécessaire pour caractériser au plus juste le domaine de stabilité du véhicule.
- Reprendre la synthèse en travaillant à masse variable (reconsidérer l'Approximation 2.9). La variation de masse joue un rôle majeur dans l'évolution de l'énergie du véhicule, et sa prise en compte au niveau du guidage devrait améliorer l'efficacité énergétique de la commande.
- Reprendre la synthèse en considérant une poussée non alignée avec le vecteur vitesse (réviser l'Approximation 2.5). Il semble que des configurations de véhicules ayant une poussée fortement asymétrique peuvent présenter un intérêt en terme de performance aéro-propulsive. Or, la prise en compte d'une telle poussée peut constituer une extension directe de la synthèse déjà réalisée.
- Reprendre l'étude et la synthèse en considérant une poussée disponible variable en fonction du Mach (revenir sur l'Approximation 2.4). En pratique, la poussée maximale disponible s'effondre avec le Mach, même en supposant une compensation *via* l'adaptation de l'entrée d'air. La prise en compte de ce phénomène devrait constituer une extension directe de la synthèse déjà réalisée.

Il semble par ailleurs que ces améliorations dépendent plus en détails des catégories et modèles des véhicules considérés, et soient par conséquent difficiles à développer ou à appliquer sur un modèle générique.

Chapitre 4

Guidage des dynamiques longitudinale et latérale

Résumé. Le Chapitre précédent était consacré à l'étude et la stabilisation de la dynamique longitudinale du véhicule. Ce chapitre propose une extension de cette étude pour la stabilisation de trajectoires de croisière du véhicule dans un environnement à 3 dimensions. De cette façon nous obtenons un système de guidage qui est i) tolérant aux saturations d'incidence et de poussée et ii) robuste aux incertitudes de modélisation. Différentes simulations illustrent le résultat obtenu.

4.1 Introduction

La complexité du vol d'un véhicule hypersonique (HSV) en trois dimensions, faisant intervenir des difficultés intrinsèques du fait de couplages multiples et de difficultés de modélisation, implique que la grande majorité des études à ce sujet se concentre sur la commande de la dynamique longitudinale du véhicule. Cependant, les travaux développés au Chapitre 3 seraient d'un intérêt pratique très limité s'ils n'étaient pas transposables au cas plus réaliste d'un véhicule qui évolue dans un environnement en 3 dimensions. C'est cette extension que nous développons dans ce chapitre.

Nous allons procéder en différentes étapes. En premier lieu, nous commençons par établir dans la Section 4.2 les équations dynamiques du vol d'un véhicule dans le cas particulier d'un vol, dans le cas particulier où l'on considère une symétrie des efforts aéro-propulsifs dans le repère aérodynamique. Cette contrainte, qui est étroitement liée au fonctionnement de la propulsion aérobie à grande vitesse, nous mène à considérer dissociés deux dynamiques faiblement couplés : la dynamique longitudinale — c'est-à-dire le mode phugoïde — et la dynamique latérale. Il se trouve que cela simplifie la synthèse de commande et permet de réutiliser les travaux du Chapitre 3. De plus, l'incidence du véhicule étant également contrainte, il se pose un problème d'allocation de commande. Pour illustrer cela, nous présentons dans la Section 4.4 la commande du vecteur vitesse, ainsi qu'une façon d'allouer la consigne en incidence pour concilier les différentes exigences de commande. Cela nous permettra de formuler les contraintes à considérer pour la synthèse de commande de la dynamique latérale, étudiée dans la Section 4.5. Dans la Section 4.6, nous combinons les développements précédents à ceux du Chapitre 3 afin de proposer une loi de guidage 3D *Bank To Turn* (BTT). Le comportement de la loi de guidage obtenue sera alors illustré par des simulations. Enfin, nous discutons dans la Section 4.6 d'autres lois de commande pour la dynamique latérale qui ont retenu notre attention au cours de nos recherches.

4.2 Dynamique d'un vol à symétrie d'efforts

Définition 4.1 (Virage incliné). Un virage incliné est un changement de direction dans lequel le véhicule penche, habituellement vers l'extérieur du virage. On parle également de *banked turn* et de stratégie *Bank To Turn* (BTT).

La Section 2.9 rappelle les équations dynamiques du vol dans le cas général. Dans la mesure où notre véhicule évolue tant que possible à dérapage nul, il nous est imposé pour la synthèse du guidage la contrainte $\Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{y}_A = 0$ dans (2.33). Cela consiste à contraindre l'orientation latérale de la résultante des forces aéro-propulsives en repère aérodynamique, dans le plan de symétrie latérale $(O, \mathbf{x}_a, \mathbf{z}_a)$. De la sorte, il faut orienter le véhicule en roulis pour générer des efforts latéraux permettant un virage. En cela, le vol va se rapprocher d'un vol de type « avion » avec une stratégie de commande en virage incliné, dont la pratique implique un vol non dérapé.

Remarque 4.1. Dans le cas d'un palier stabilisé, une autre façon d'aborder le guidage consisterait à fixer $\Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{y}_A = -g(V) \sin \mu \cos \gamma$ dans (2.33); c'est-à-dire que la force induite par le dérapage compenserait la composante latérale de la gravité exprimée dans le repère aérodynamique. Cette technique est en fait souvent utilisée dans le cas des engins démunis de prise d'air, ou ayant une prise d'air axi-symétrique. En effet, l'orientation de la résultante des forces aérodynamiques sur ce type de véhicule est peu couplé à l'orientation de l'engin.

Nous faisons l'hypothèse d'un véhicule dont la masse est constante. Le modèle dynamique déduit de (2.33) est alors

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad (4.1a)$$

$$V \dot{\gamma} = -g(V) \sin^2 \mu \cos \gamma + \cos \mu \left(\frac{1}{m} \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{z}_A - g(V) \cos \mu \cos \gamma \right), \quad (4.1b)$$

$$V \cos \gamma \dot{\chi} = g(V) \cos \mu \sin \mu \cos \gamma - \sin \mu \left(\frac{1}{m} \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{z}_A - g(V) \cos \mu \cos \gamma \right). \quad (4.1c)$$

Nous pouvons y adjoindre les équations de position (h, x, y) , intégrales du vecteur vitesse :

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad \dot{x} = V \cos \chi \cos \gamma, \quad \dot{y} = V \sin \chi \cos \gamma. \quad (4.2)$$

4.3 Modèle de comportement

Suite aux modèles développés dans les Chapitres 2 et 3, remplaçons $\frac{1}{m} \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{z}_A$ par $g(V)\Lambda(V)\alpha$ avec $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\Lambda(V) = \frac{C_{l_a} V^2 S(V) \rho(h_0)}{g(V)}, \quad (4.3)$$

avec C_{l_a} défini par (2.43), $S(V)$ définie par (2.7) et $g(V)$ définie par (3.8). Considérons de plus le changement d'entrées

$$\alpha_\gamma = \alpha \cos \mu, \quad \alpha_\chi = \alpha \sin \mu. \quad (4.4)$$

Le modèle dynamique du comportement en guidage du véhicule considéré est donc le suivant :

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{h} = V \sin \gamma, \quad (4.5a)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{g(V)}{V} (\alpha_\gamma \Lambda(V) - \cos \gamma), \quad \dot{x} = V \cos \chi \cos \gamma, \quad (4.5b)$$

$$\dot{\chi} = -\frac{g(V)\Lambda(V)}{V \cos \gamma} \alpha_\chi, \quad \dot{y} = V \sin \chi \cos \gamma, \quad (4.5c)$$

contrôlé par le vecteur $(e \ \alpha_\gamma \ \alpha_\chi)^\top$.

Il apparaît alors que les équations de la dynamique de guidage sont l'agrégation d'un mode phugoïde tel que celui étudié dans le Chapitre 3 et d'une dynamique latérale :

$$\dot{y} = V \sin \chi \cos \gamma, \quad \dot{\chi} = -\frac{g(V)\Lambda(V)}{V \cos \gamma} \alpha_\chi. \quad (4.6)$$

La contrainte de vol à dérapage nul ouvre ici une opportunité, dans la mesure où on peut aborder ce système comme une extension faiblement couplée de la dynamique longitudinale. La commande de cette dernière ayant déjà été étudiée dans le Chapitre 3, il suffit de concentrer notre étude sur la commande de la dynamique latérale (4.6).

L'objectif final pour réaliser un vol de croisière est de faire converger le vecteur d'état $(h \ y \ V \ \gamma \ \chi)^\top$ à la consigne $(h_0 \ y_0 \ V_0 \ 0 \ 0)^\top$, indépendamment des conditions initiales, et sous contrainte de bornitudes des commandes en bilan aéro-propulsif e et incidence α .

Pour cela, nous commencerons par aborder le cas de la commande du vecteur vitesse $(V, \gamma, \chi)^\top$. Ensuite, nous proposerons une loi de commande pour la dynamique latérale. Enfin, nous combinerons les résultats obtenus afin de commander simultanément les dynamiques latérale et longitudinale.

4.4 Commande du vecteur vitesse

On s'intéresse à la stabilisation de l'équilibre $(V_0, 0, 0)$, afin d'exposer la logique de commande.

4.4.1 Synthèse d'une commande gradient

Dans un premier temps, on s'intéresse à la stabilisation de l'équilibre $(V_0, 0, 0)$. La dynamique du vecteur vitesse est donnée par le système

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{g(V)}{V} (\alpha_\gamma \Lambda(V) - \cos \gamma), \quad \dot{\chi} = -\frac{g(V)\Lambda(V)}{V \cos \gamma} \alpha_\chi. \quad (4.7)$$

En suivant la même démarche que la Section 3.5, nous pouvons commander le vecteur vitesse par commande gradient. En effet, considérons la fonction $Z : \mathbb{R} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$Z(V, \gamma, \chi) = \alpha_0 \int_{V_0}^V \Lambda(s) ds + V_0 - V \cos \gamma + (1 - \cos \chi), \quad (4.8)$$

où $\alpha_0 = \Lambda(V_0)^{-1}$. Celle-ci est nulle en $(V_0, 0, 0)$ et strictement positive partout ailleurs sur $\mathcal{C} \times \mathbb{S}$, avec \mathcal{C} défini par (3.36). La dérivée de Z le long des trajectoires est

$$\begin{aligned} \overbrace{\dot{Z}(V, \gamma, \chi)}^{\cdot} &= \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos(\gamma) \right) e \\ &\quad + g(V) (\alpha_\gamma - \Lambda(V_0)^{-1}) \sin \gamma - \sin \chi \frac{g(V)\Lambda(V)}{V \cos \gamma} \alpha_\chi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dans le but de stabiliser asymptotiquement l'équilibre $(V_0, 0, 0)$, et dans la mesure où $V \cos \gamma$, $g(V)$ et $\Lambda(V)$ sont positifs, le choix le plus simple est de prendre la commande gradient

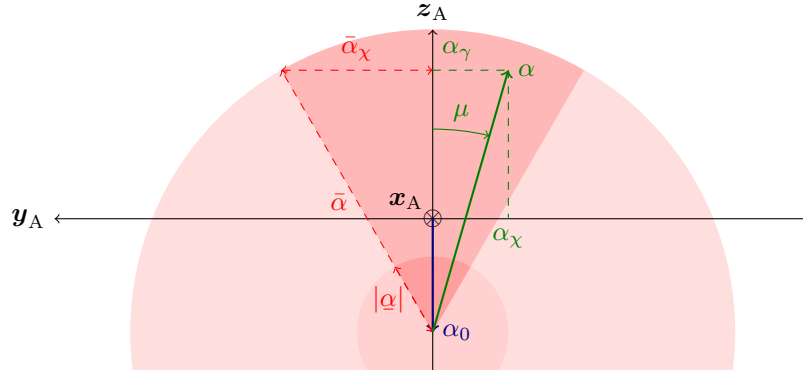
$$e = -k_V \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma \right), \quad \alpha_\gamma = \alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \quad \alpha_\chi = k_\chi \sin \chi. \quad (4.10)$$

4.4.2 Prise en compte des saturations d'incidence

Motivation

Les variables utilisées pour le contrôle sont $(e, \alpha_\gamma, \alpha_\chi)$, avec

$$\alpha_\gamma = \alpha \cos \mu, \quad \alpha_\chi = \alpha \sin \mu, \quad (4.11)$$

FIGURE 4.1 – Schéma illustrant les possibilités de d'excursion du couple (α, μ) .

et nous devons préciser les limites d'excursion de ces différentes variables, car l'incidence du véhicule, liée aux contrôles α_χ et α_γ par $\alpha = \sqrt{\alpha_\chi^2 + \alpha_\gamma^2}$, est soumise à des contraintes.

Pour cela, gardons à l'esprit que les coordonnées originales de commande pour le système de guidage sont (e, α, μ) . Il serait donc inapproprié de commander le véhicule avec les variables $(e, \alpha_\gamma, \alpha_\chi)$, en faisant l'hypothèse que celles-ci doivent appartenir à un cube. En pratique, les contraintes physiques sur e et α sont plutôt de nature à définir un cylindre voire un tube dans l'espace $(e, \alpha_\gamma, \alpha_\chi)$.

Approche choisie

La Figure 4.1 montre l'ensemble des forces transversales au repère aérodynamique qu'il est possible d'engendrer sous une hypothèse d'incidence α bornée. Il s'agit du disque extérieur, de rayon $\bar{\alpha}$. Il nous faut choisir comment allouer les variables de commande $(\alpha_\gamma, \alpha_\chi)$ tout en garantissant leur réalisabilité sous une contrainte de bornitude de α , notée ici $\bar{\alpha}$.

Le contrôle de la pente de vitesse est particulièrement critique à vitesse hypersonique. Nous faisons donc le choix d'allouer la commande en incidence de façon à utiliser *en priorité* la portance afin de commander la pente de vitesse γ . Supposons donc avoir défini

- une borne $\bar{\alpha}$ sur la prise d'incidence, de sorte que $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$;
- une commande α_γ bornée de telle sorte que $|\underline{\alpha}_\gamma| \leq \alpha_\gamma \leq \bar{\alpha}_\gamma$;

Alors nous pouvons déduire à tout moment un couple de bornes $(\underline{\alpha}_\chi, \bar{\alpha}_\chi)$ pour la commande de la dynamique latérale α_χ .

Nous proposons de définir une marge $\epsilon_\alpha > 0$ arbitrairement petite, et de poser $\max(|\underline{\alpha}_\gamma|, |\bar{\alpha}_\gamma|) = \bar{\alpha} - \epsilon_\alpha$. Alors nous déduisons

$$\alpha_\chi = \min_{(\alpha, \mu) \in [0, \bar{\alpha}] \times \mathbb{S}} \alpha \sin \mu, \quad \bar{\alpha}_\chi = \max_{(\alpha, \mu) \in [0, \bar{\alpha}] \times \mathbb{S}} \alpha \sin \mu, \quad (4.12)$$

sous la contrainte $\alpha_\gamma = \alpha \cos \mu$, avec $0 \leq \alpha_\gamma \leq \bar{\alpha} - \epsilon_\alpha$.

En résumé, à supposer l'existence d'une commande α_γ telle que $|\alpha_\gamma| \leq \bar{\alpha} - \epsilon_\alpha$, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} \text{d'abord} & \quad \bar{\alpha}_\chi = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \alpha_\gamma^2}, \\ \text{puis} & \quad \alpha_\chi, \\ \text{puis} & \quad \mu = \text{atan2}(\alpha_\chi, \alpha_\gamma), \\ \text{ainsi que} & \quad \alpha = \sqrt{\alpha_\gamma^2 + \alpha_\chi^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, dès que nous avons connaissance de α_γ , nous disposons d'un couple de bornes $(\underline{\alpha}_\chi, \bar{\alpha}_\chi) = (-\bar{\alpha}_\chi, \bar{\alpha}_\chi)$ permettant de calculer α_χ tel que $\alpha \leq \bar{\alpha}$ tout au long de la trajectoire du vol. De plus, puisque $\epsilon_\alpha > 0$, il se trouve que $\bar{\alpha}_\chi > 0$.

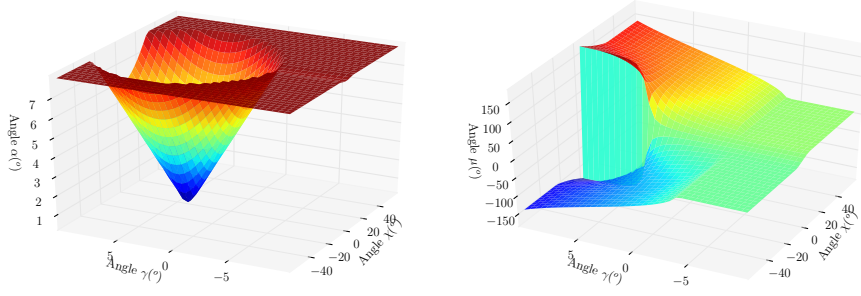


FIGURE 4.2 – Lois de commande en roulis aérodynamique μ et incidence α , fonctions de la pente γ et de l'erreur de cap χ .

Remarque 4.2. Pour l'étude du problème de stabilisation en croisière, nous imposons un dérapage nul ainsi qu'une incidence positive ou nulle. Ceci s'explique par le fait que dans le cadre d'un vol aérobic, les prises d'incidence négatives dégradent la disponibilité de la propulsion. Donc, puisque les prises d'incidences sont d'une part plus étendues dans le domaine positif, et d'autre part qu'elle favorisent la disponibilité du facteur de propulsion, elles sont systématiquement privilégiées ici. On peut cependant imaginer d'autres contextes, où, prendre de faibles incidences négatives et un faible dérapage peut être très bénéfique. C'est le cas par exemple pour une consigne de trajectoire balistique. Dans ce cas précis, l'incidence étant proche de zéro, le choix de l'allocation de commande est un problème beaucoup plus délicat que le cas que nous exposons ici.

4.4.3 Application : stabilisation du vecteur vitesse par commande gradient

Définition de la commande

À partir de (4.10), un contrôleur en (e, α, μ) stabilisant l'équilibre $(V_0 \ 0 \ 0)^\top$ est donné par

$$e = \text{sat} \left\{ -k_e \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma \right), \underline{e}, \bar{e} \right\}, \quad \mu = \text{atan2}(\alpha_\chi, \alpha_\gamma), \quad (4.13a)$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_\gamma^2 + \alpha_\chi^2}, \quad \bar{\alpha}_\chi = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \alpha_\gamma^2}, \quad (4.13b)$$

$$\alpha_\chi = \text{sat}(k_\chi \sin \chi, -\bar{\alpha}_\chi, \bar{\alpha}_\chi), \quad \alpha_\gamma = \text{sat}(1/\Lambda(V_0) - k_\gamma \gamma, 0, \bar{\alpha} - \epsilon_\alpha), \quad (4.13c)$$

où k_e , k_γ et k_χ sont des gains de réglage, $\epsilon_\alpha > 0$ et \underline{e} , \bar{e} , et $\bar{\alpha}$ sont des bornes de commande.

Simulation

La Figure 4.2 illustre le comportement de la commande (4.13). Nous pouvons remarquer deux choses. La première est que nous avons bel et bien une excursion de la commande α qui est globalement bornée, ce qui était une de nos préoccupations initiales. La seconde est que nous pouvons observer une singularité dans la définition de μ dans le cas d'incidences faibles. C'est un problème inhérent à une stratégie de commande sans dérapage. Pour palier ce problème il faudrait combiner un vol à virage incliné avec un vol faiblement dérapé. Voir également la Remarque 4.2.

Les Figures 4.4 et 4.3 montrent un résultat de simulation avec des conditions d'initialisation illustrant l'allocation de commande qui donne priorité à la commande de la pente de vitesse. Le modèle de simulation utilisé est un modèle relativement simple, et proche du modèle de comportement :

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{\chi} = V \cos \chi \cos \gamma, \quad (4.14a)$$

$$V \dot{\gamma} = g(V)(\alpha \rho(h) \Lambda(V) \cos \mu - \cos \gamma), \quad \dot{h} = V \sin \gamma, \quad (4.14b)$$

$$V \cos \gamma \dot{\chi} = -\alpha \rho(h) g(V) \Lambda(V) \sin \mu, \quad \dot{\gamma} = V \sin \chi \cos \gamma. \quad (4.14c)$$

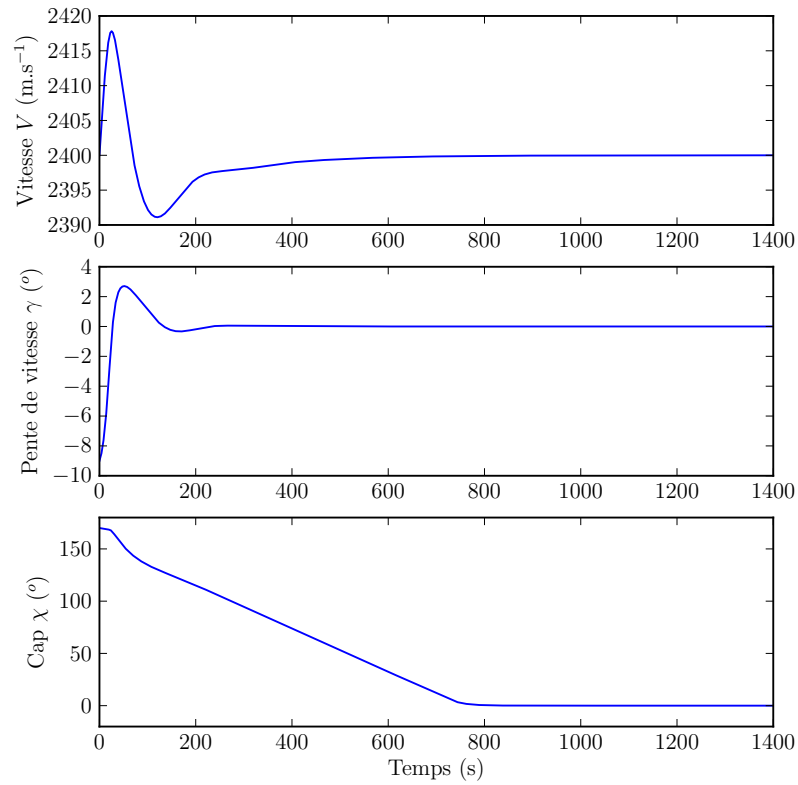
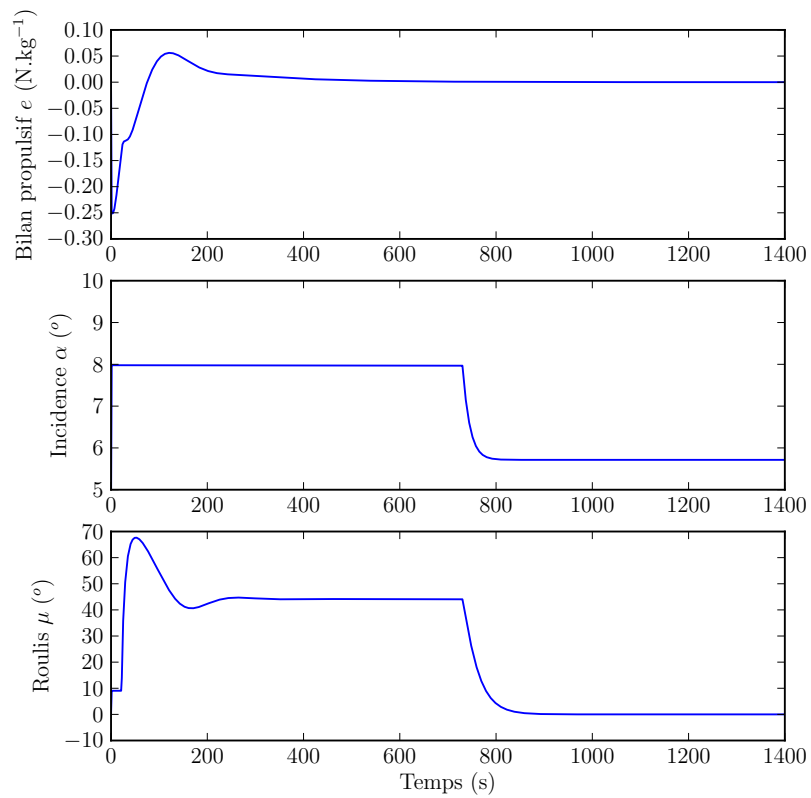


FIGURE 4.3 – Résultats de simulation : état (V, γ, χ) et commandes de vol (e, α, μ) . Notons la périodicité en χ .



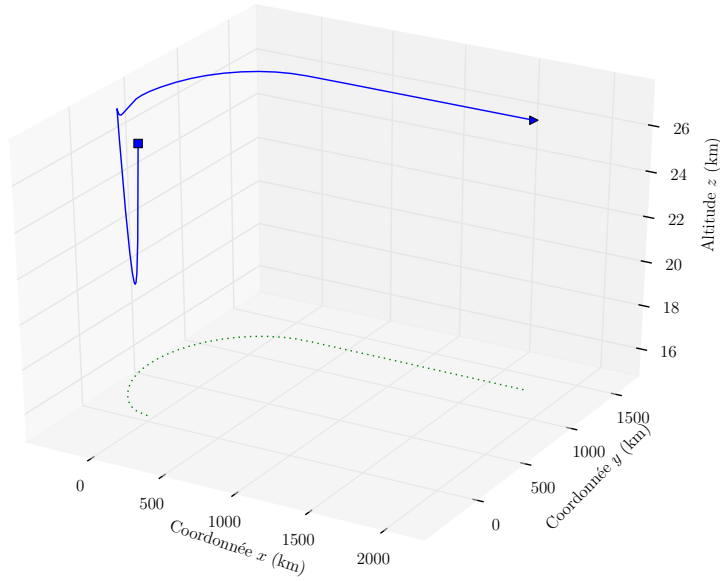


FIGURE 4.4 – Résultats de simulation : trajectoire du vol.

Le véhicule est initié avec une vitesse de 2400 m.s^{-1} , une pente de vitesse de -9° , un cap à 170° et une altitude de 27 km . La consigne en cap est 0° . Avec ce contrôleur, la convergence asymptotique de l'altitude et de l'écart de trajectoire n'est bien sûr pas assurée. On remarque que ce cas d'initialisation est tel que le vol commence par commander la pente en allouant l'essentiel de l'incidence disponible. C'est seulement ensuite, au bout de quelques secondes, qu'une prise de roulis est effectuée pour corriger le cap. De la sorte, on vérifie bien que la consigne d'incidence totale α reste bornée au cours du vol, ce qui était une de nos préoccupations initiales.

4.5 Stabilisation de la dynamique latérale du véhicule

Dans la mesure où nous nous intéressons à commander le véhicule avec une incidence bornée, le découplage des entrées α_χ et α_γ ne peut avoir de sens que si nous sommes en mesure de proposer une loi de commande qui stabilise l'équilibre de (4.6) à la consigne $(y_0, 0)$ avec une entrée dont l'amplitude est arbitrairement bornée. C'est ce que nous proposons dans cette section. Une fois cette loi de commande établie, il suffira d'allouer la commande en respectant la borne sur la valeur d'incidence.

4.5.1 Le modèle de comportement

Étant donné le domaine de vol considéré, $\cos \gamma$ n'est jamais nul et le changement de temps $d\tau = V \cos \gamma dt$ est admissible et permet de récrire (4.6) en

$$\overset{\circ}{y} = \sin \chi, \quad \overset{\circ}{\chi} = -\frac{g(V)\Lambda(V)}{(V \cos \gamma)^2} \alpha_\chi, \quad (4.15)$$

où $\overset{\circ}{\cdot}$ signifie $\frac{d}{d\tau}$. Ce système est un double intégrateur non linéaire. Notre objectif est d'assurer la stabilisation asymptotique de l'équilibre $(y_0, 0)$ avec α_χ arbitrairement borné. Dans cette section, nous considérons faiblement couplées les dynamiques longitudinales et latérales, et nous notons

$$\frac{g(V)\Lambda(V)}{(V \cos \gamma)^2} = a(t). \quad (4.16)$$

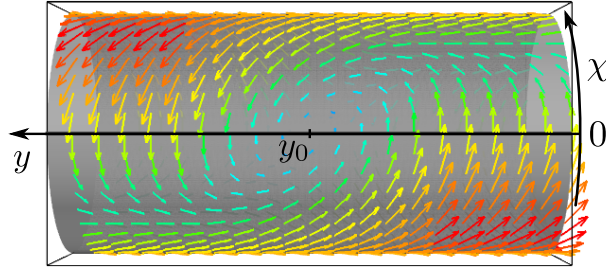
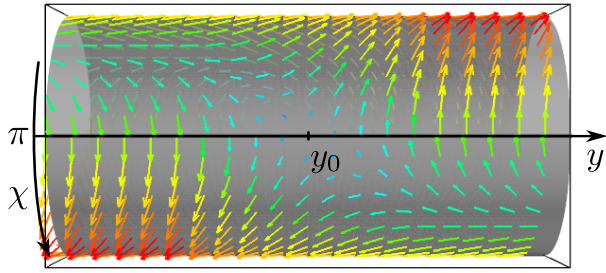


FIGURE 4.5 – Tracé du flot du système (4.17) commandé par la loi de guidage (4.18), dans l'espace des phases, pour $a(t) = 1$, $k(t) = 2$, $\lambda = 0,5$, $k_\phi = 1$ (face \mathbb{S}^+ ci-dessus; face \mathbb{S}^- ci-dessous).



Le modèle de comportement considéré se résume donc à

$$\dot{y} = \sin \chi, \quad \dot{\chi} = -a(t)\alpha_\chi, \quad (4.17)$$

et nous avons pour objectif de commander ce système à la consigne $(y_0, 0)$.

4.5.2 Synthèse par domination

La structure de ce système autorise de nombreuses synthèses de loi de commande : par inversion, par rétropropagation, etc. Cependant, nous recherchons une loi de commande possédant une tolérance aux saturations de l'entrée et aux incertitudes de modèle. Nous proposons donc par la suite une technique de synthèse par commande gradient. D'autres propositions de commande sont discutées dans la Section 4.7.

Théorème 4.1. *Pour tout $\lambda \in]0 ; 1[$, $a(t) > \underline{a} > 0$ et $k(t) > \underline{k} > 0$, il existe un gain k_ϕ tel que le système (4.17) commandé par*

$$\alpha_\chi = k(t)(\lambda \sin \chi + (1 - \lambda)\phi(y) |\cos \chi|) < k(t), \quad (4.18)$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\phi(s) = \text{sat}(k_\phi(s - y_0), -1, 1)$ possède un équilibre $(y, \chi) = (y_0, 0)$ asymptotiquement stable avec $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^+)$ comme bassin d'attraction, où $\mathbb{S}^+ = \{\chi \in \mathbb{S} : \cos \chi > 0\}$.

La Figure 4.5 montre le flot du système (4.17) commandé par la loi de guidage (4.18) dans l'espace des phases.

Démonstration du Théorème 4.1. Considérons la fonction $Y : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$Y(y, \chi) = -\lambda \ln(\cos(\chi)) + (1 - \lambda)\chi\phi(y) + l(1 - \lambda) \int_{y_0}^y \phi(s) ds. \quad (4.19)$$

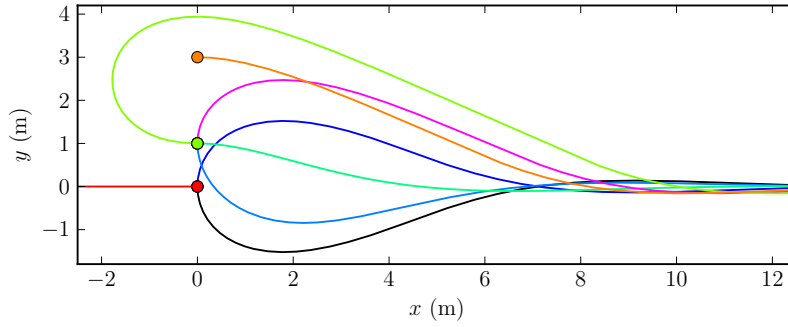


FIGURE 4.6 – Trajectoires, dans l'espace physique, d'un véhicule commandé par la loi de guidage (4.18). Le véhicule est initialisé à l'abscisse $x = 0$, pour différentes variations d'ordonnée y et de cap χ .

Elle est radialement non bornée, nulle en $(y, \chi) = (y_0, 0)$ et positive partout ailleurs si $k_\phi \leq \lambda l / (1 - \lambda)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. En effet, son gradient défini par

$$\frac{\partial Y}{\partial \chi} = \lambda \tan(\chi) + (1 - \lambda)\phi(y), \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = (1 - \lambda)(\chi\phi'(y) + l\phi(y)) \quad (4.20)$$

est nul si $(1 - \lambda) \arctan(\phi(y))\phi'(y)/\lambda = l\phi(y)$, dont $\phi(y) = 0$ est l'unique solution si $l \geq (1 - \lambda)k_\phi/\lambda$.

La dérivée de $Y(y, \chi)$ le long des trajectoires est

$$\overline{\dot{Y}(y, \chi)} = -a(t)(\lambda \tan(\chi) + (1 - \lambda)\phi(y))\alpha_\chi + (1 - \lambda)(\chi\phi'(y) + l\phi(y))\sin \chi. \quad (4.21)$$

Posons $\alpha_\chi = k(t)v$, avec $v = \lambda \sin \chi + (1 - \lambda) \cos \chi \phi(y)$. Nous avons

$$\overline{\dot{Y}(y, \chi)} = -\frac{a(t)k(t)v^2}{\cos \chi} + \frac{lv \sin \chi}{\cos \chi} + \sin^2 \chi \left[(1 - \lambda) \frac{\chi\phi'(y)}{\sin \chi} - \frac{\lambda l}{\cos \chi} \right]. \quad (4.22)$$

Puisque, par l'inégalité de Young, $2lv \sin \chi \leq \underline{a}k v^2 + (\underline{a}k)^{-1}l^2 \sin^2 \chi$ et puisque¹ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $|\chi| < |\tan \chi|$, alors

$$\overline{\dot{Y}(y, \chi)} \leq -\frac{1}{2} \frac{\underline{a}k v^2}{\cos \chi} + \frac{\sin^2 \chi}{\cos \chi} \left[\frac{l^2}{2\underline{a}k} + (1 - \lambda)k_\phi - \lambda l \right]. \quad (4.23)$$

On peut donc toujours fixer l et k_ϕ suffisamment petit pour garantir la négativité de la dérivée de $Y(y, \chi)$ le long des trajectoires. Il suffit par exemple de sélectionner

$$l < \frac{1}{2} \lambda \underline{a}k, \quad k_\phi < \frac{\lambda l}{4(1 - \lambda)} = \frac{\lambda^2 \underline{a}k}{8(1 - \lambda)}. \quad (4.24)$$

Dans ce cas, l'équilibre $(y_0, 0)$ est asymptotiquement stable, avec un bassin d'attraction contenant le demi cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^+$. \square

Une illustration du comportement du système (4.17) commandé par la loi de guidage (4.18) est donnée Figure 4.6, pour différentes configurations de départ. On remarque que les débattements sont amples, ce qui est une conséquence de la bornitude de la loi de commande. On remarque également que le respect de la périodicité du système à pour conséquence directe l'existence d'un point d'équilibre instable lorsque le véhicule est initialisé à $(y_0, (2n + 1)\pi)$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

1. Sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, $(x - \tan x)' = -\tan^2 x$ implique que $x - \tan x$ est strictement décroissante, sauf pour $x = 0$, où $x = \tan(x)$. Puisque $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = +\infty$, la monotonie de $x - \tan x$ implique que $|\tan x| \geq |x|$ sur l'ensemble du domaine considéré. Par symétrie, la propriété s'étend sur \mathbb{S}^+ .

4.6 Synthèse finale de la loi de guidage 3D *Bank To Turn*

À partir des résultats des sections précédentes, nous pouvons proposer une loi de guidage commandant simultanément les dynamiques longitudinale et latérale. Rappelons que l'objectif de commande en vol de croisière est de faire converger le vecteur d'état $(h \ y \ V \ \gamma \ \chi)^\top$ vers la consigne $(h_0 \ y_0 \ V_0 \ 0 \ 0)^\top$. Étant donné que nous découplons les dynamiques longitudinale et latérale par un changement de variable, il est aisé de contrôler une croisière par la combinaison des lois de commande (3.57) et (4.18).

Le modèle du véhicule considéré est

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{h} = V \sin \gamma, \quad (4.25a)$$

$$\dot{\gamma} = g(V) \frac{\alpha \cos \mu \Lambda(V) - \cos \gamma}{V}, \quad \dot{x} = V \cos \chi \cos \gamma, \quad (4.25b)$$

$$\dot{\chi} = -g(V) \frac{\alpha \sin \mu \Lambda(V)}{V \cos \gamma}, \quad \dot{y} = V \sin \chi \cos \gamma. \quad (4.25c)$$

La loi de guidage proposée est alors

$$\alpha_c = \alpha_\chi^2 + \alpha_\gamma^2, \quad \mu_c = \text{atan2}(\alpha_\chi, \alpha_\gamma), \quad \eta_c = \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 + e_c, \quad (4.26)$$

où

$$\alpha_\gamma = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}_\gamma, \bar{\alpha}_\gamma \right) - V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad (4.27a)$$

$$\alpha_\chi = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \alpha_\gamma^2} \left[\frac{k_\chi}{1 + k_\chi} \sin \chi + \frac{1}{1 + k_\chi} |\cos \chi| \psi'_\chi(y - y_0) \right], \quad (4.27b)$$

$$e_c = \text{sat} \left(-k_V \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \varrho(V) - E_0) \right), \underline{\eta}, \bar{\eta} \right). \quad (4.27c)$$

Les fonctions ψ'_\star sont définies par

$$\psi'_\gamma(s) = \text{sat}(k_{\psi_\gamma} s, \underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha), \quad (4.28)$$

$$\psi'_V(s) = \text{sat}(k_{\psi_V} s, \underline{E}, \bar{E}), \quad (4.29)$$

$$\psi'_\chi(s) = \text{sat}(k_{\psi_\chi} s, -1, 1), \quad (4.30)$$

et les principaux degrés de liberté du contrôleur sont les gains $(k_V \ k_\gamma \ k_\chi \ k_{\psi_V} \ k_{\psi_\gamma} \ k_{\psi_\chi})$, strictement positifs. La marge ϵ_α peut être choisie arbitrairement petite. Les limites de saturation sont

$$\underline{\eta} < \min_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 < \max_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 < \bar{\eta}, \quad (4.31a)$$

$$\underline{\alpha}_\gamma < \alpha_0 + \min_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} < \alpha_0 + \max_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} < \bar{\alpha}_\gamma, \quad (4.31b)$$

avec $\bar{\alpha} = \max(|\underline{\alpha}_\gamma|, |\bar{\alpha}_\gamma|) - \epsilon_\alpha$, où $\epsilon_\alpha > 0$ peut être choisie arbitrairement petit. Aussi, nous avons les bornes

$$\underline{h}_\alpha < 0 < \bar{h}_\alpha, \quad \underline{E} < 0 < \bar{E}. \quad (4.31c)$$

Rappelons également que, conformément à la Remarque 3.4, les contrôles obtenus peuvent être globalement bornés sur tout le domaine de vol si les contraintes sur les entrées sont définies à cette fin.

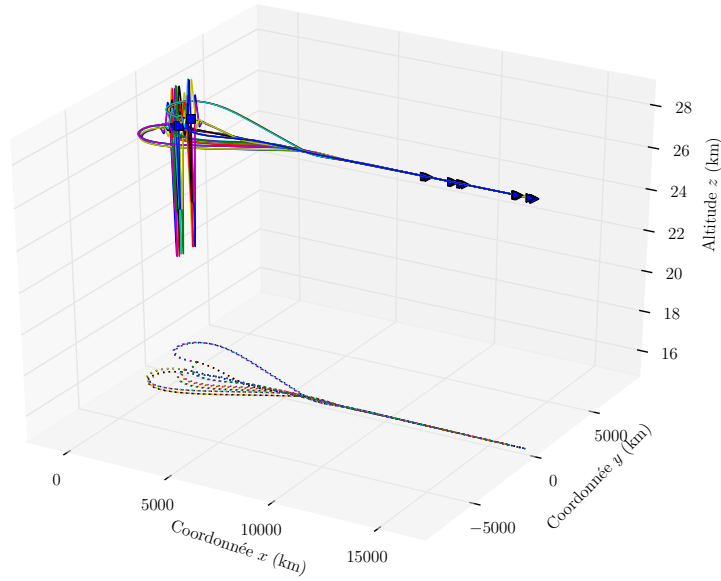


FIGURE 4.7 – Résultats de simulation : trajectoires commandées à la consigne $(h_0 ; V_0 ; y_0) = (27\,000 ; 2\,400 ; 0)$.

4.6.1 Simulation

Les Figures 4.7 et 4.8 montrent un résultat de simulation avec des conditions d'initialisation illustrant l'allocation de commande qui donne priorité à la commande de la pente de vitesse. Du fait de la complexité du contrôleur, l'étude précise des trajectoires est plus laborieuse que dans le cas de la Figure 4.3. Toutefois, la convergence des trajectoires sur le point de consigne, et la bornitude de l'excursion de l'incidence α apparaît très nettement.

4.7 Discussion sur la synthèse par d'autres approches

Les sections précédentes ont été basées sur la loi de commande (4.18). Celle-ci a une particularité, qui est de poser le problème de guidage comme un problème de régulation autonome. En effet, la plupart des travaux existants en matière de guidage reposent généralement soit sur un problème de poursuite (c'est le cas de la navigation proportionnelle), soit sur un problème de régulation linéaire autour d'une trajectoire.

Nous proposons dans cette section trois synthèses de commande qui ont retenu notre attention au cours de nos recherches, parce qu'elles tendent à poser le problème de guidage comme un problème de régulation² autonome. Il s'agit toute trois de synthèse Lyapunov, mais elles supposent des démarches et des propriétés sensiblement différentes.

4.7.1 Définition du problème

Le problème que nous considérons est le suivant : stabiliser l'équilibre $(y_0, 0)$ du système

$$\dot{y} = \sin \chi, \quad \dot{\chi} = -a_0 \alpha_\chi, \quad (4.32)$$

où $a_0 > 0$ est une constante mal connue, avec une commande u bornée par $\bar{\alpha}_\chi(t)$, et en préservant la nature périodique du système.

2. Dans un sens, il s'agit de créer un « modèle interne » décrivant le problème de guidage de façon plus complète que de la façon d'un problème de poursuite.

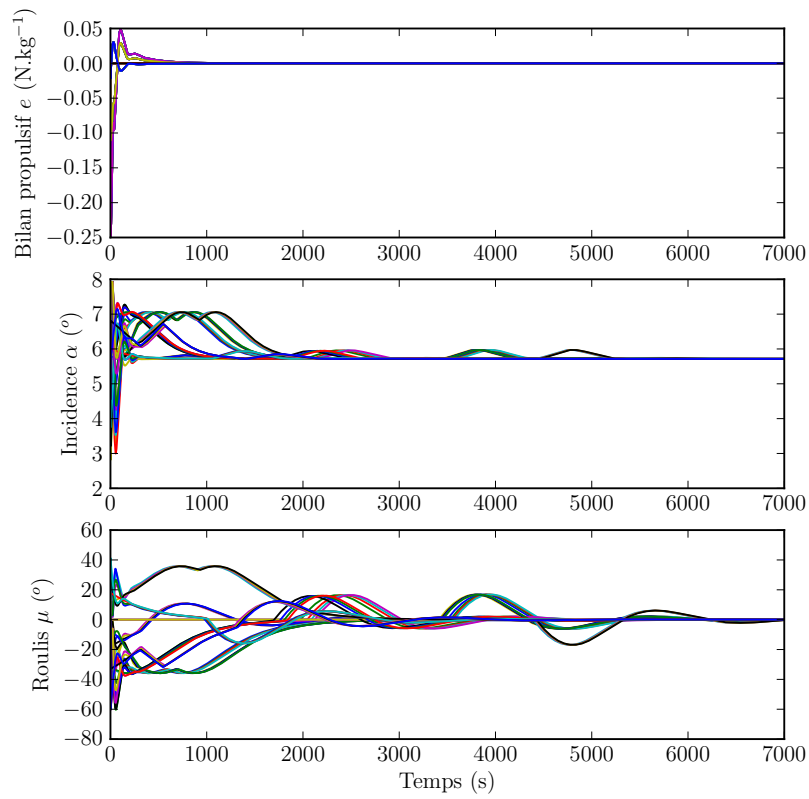
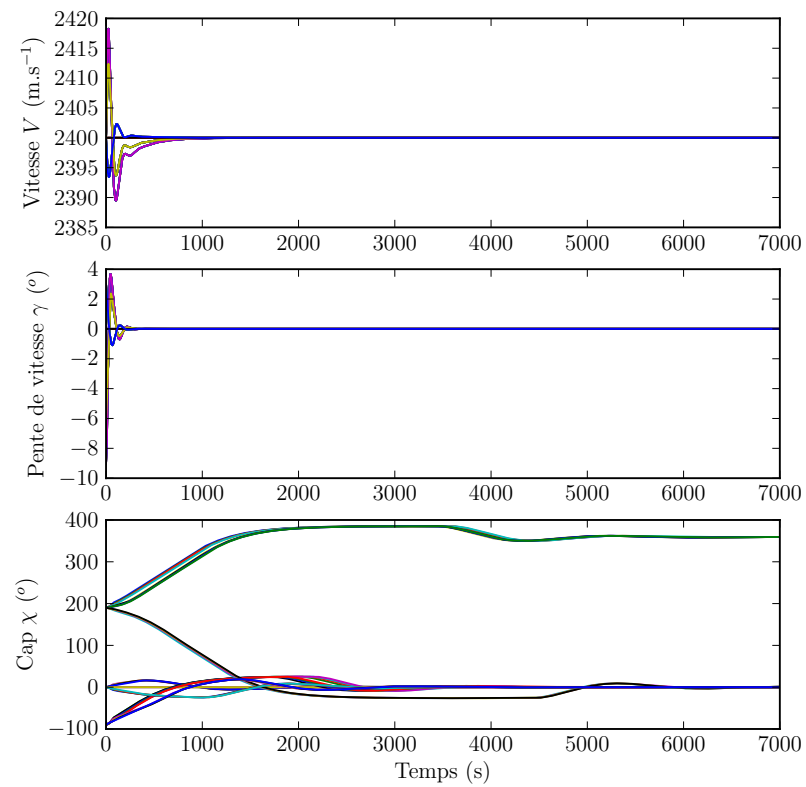


FIGURE 4.8 – Résultats de simulation : état et commandes de vol.



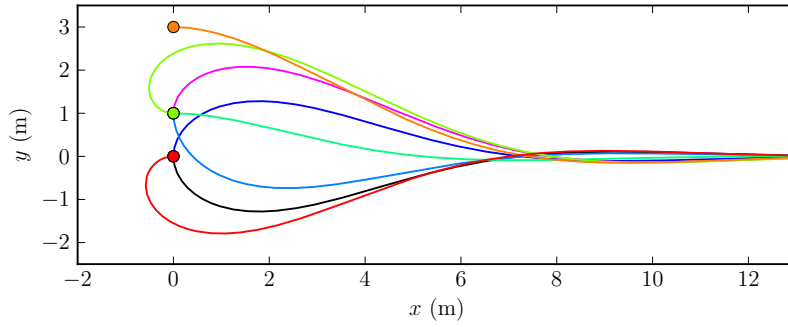


FIGURE 4.9 – Trajectoires, dans l'espace physique, d'un véhicule commandé par la loi de guidage (4.33). Le véhicule est initialisé à l'abscisse $x = 0$, pour différentes variations d'ordonnée y et de cap χ .

4.7.2 Synthèse Lyapunov

Dans Geri et Bertoni (2004), les auteurs proposent une loi de commande par assignation de fonction de Lyapunov. Leur objectif initial consiste à dépasser les techniques de navigation proportionnelle, en proposant une loi de guidage contrôlant un avion sur une orientation de référence plutôt que de poursuivre un point de passage. Celle-ci s'écrit

$$\alpha_\chi = k_0\chi + k_1 \arctan\left(\frac{y - y_0}{k_2}\right), \quad (4.33)$$

et fonctionne avec pour domaine d'attraction

$$\mathcal{A} = \{(y, \chi) : (y, \chi) \in]-\pi, \pi] \times]-\infty, \infty[\}, \quad (4.34)$$

si $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ et $k_0 > \frac{1}{2}k_1$. Cette dernière contrainte assure l'unicité de l'équilibre stabilisé.

Une illustration du comportement du véhicule commandé par la loi de guidage (4.33) est donnée Figure 4.9, pour différentes configurations de départ.

Cette loi de guidage ne résout pas tous les problèmes que nous nous posons ici. D'une part, elle n'offre pas de contrainte de bornitude pour toute valeur de χ , d'autre part, elle ne respecte pas la périodicité du système en χ .

Toutefois, poser le problème de guidage comme un problème de régulation plutôt qu'un problème de poursuite est une démarche dont l'étude a contribué à faire émerger les propositions qui suivent.

4.7.3 Synthèse par *forwarding*

La présence d'un terme de commande « dérivée » en $\sin \chi$ dans (4.13) nous invite à réfléchir à une synthèse par *forwarding*. En effet, à supposer $\alpha_\chi = \sin \chi$, il apparaît de façon directe que $\frac{d}{dt}(a_0 y + \chi) = 0$. C'est l'exploitation de cette propriété que nous proposons alors.

Considérons la fonction de Lyapunov

$$Y(y, \chi) = (1 - \cos \chi) + k_1 \psi_\chi(k_2(y - y_0) + k_3 \chi), \quad (4.35)$$

où $\psi_\chi(s) = \int_0^s \text{sat}(x, -1, 1) dx$, et posons $\alpha_\chi = k_0 \sin \chi + v$. La dérivée de Y le long des trajectoires vérifie

$$\widehat{Y}(y, \chi) = k_1 k_2 \psi'_\chi(k_2(y - y_0) + k_3 \chi) \sin \chi - a_0 (\sin \chi + k_1 k_3 \psi'_\chi(k_2(y - y_0) + k_3 \chi)) (k_0 \sin \chi + v). \quad (4.36)$$

En posant $a_0 = k_0 k_2 k_3$, nous obtenons

$$\widehat{Y}(y, \chi) = -a_0 k_0 \sin^2 \chi - a_0 (\sin \chi + k_1 k_3 \psi'_\chi(k_2(y - y_0) + k_3 \chi)) v. \quad (4.37)$$

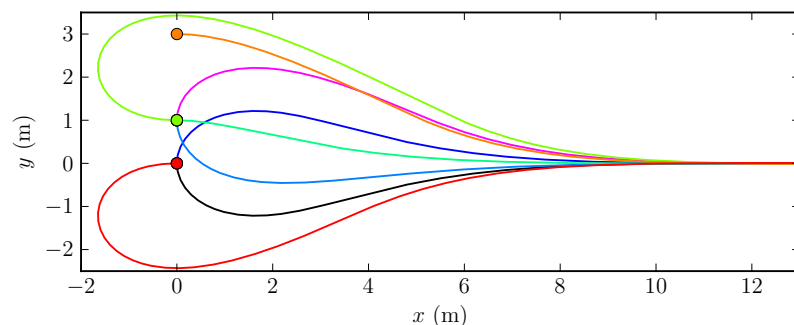


FIGURE 4.10 – Trajectoires, dans l’espace physique, d’un véhicule commandé par la loi de guidage (4.38). Le véhicule est initialisé à l’abscisse $x = 0$, pour différentes variations d’ordonnée y et de cap χ .

Une commande garantissant la négativité de la dérivée de Y le long des trajectoires est donc donnée par

$$\alpha_\chi = (k_0 + k_4) \sin \chi + k_1 k_3 k_4 ((a_0 k_0 k_3 (y - y_0) + k_3 \chi), \quad (4.38)$$

avec k_0, k_1, k_3 et k_4 strictement positifs.

Une illustration du comportement du véhicule commandé par la loi de guidage (4.38) est donnée Figure 4.10, pour différentes configurations de départ.

Par rapport au problème que nous nous posons ici, cette loi de commande offre de bonnes propriétés de robustesse du fait de la synthèse par domination inhérente au *forwarding*, et elle permet des contraintes de borne sur χ . La conséquence de cette borne sur la commande est visible sur l’amplitude des trajectoires simulées, plus grandes que dans le cas de la Figure 4.9.

Cependant, la périodicité du système n’est pas respectée. De ce fait, il existe une infinité d’équilibres stables (y_e, χ_e) tels que $\chi_e = a_0 k_0 (y_e - y_0)$. La stabilisation de l’équilibre $(y_0, 0)$ n’est donc pas globale.

Par ailleurs, nous ne disposons pas d’un outil de synthèse permettant à la commande de respecter une borne arbitrairement petite $\bar{\alpha}_\chi$, évoluant arbitrairement au cours du temps. Dans le cas présent, le terme $k_0 \sin \chi$ dans (4.38) est indispensable à la commande et impossible à réduire arbitrairement au cours du temps.

4.7.4 Synthèse par annulation

Nous développons ici une approche originale, basée sur les fonctions de Lyapunov, et inspirée des synthèses précédentes.

Proposition 4.1. *Pour toute initialisation $(y, \chi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, il existe un équilibre $(y_0, 2n\pi)$ pour le système (4.17), avec $n \in \mathbb{Z}$, tel qu’il soit asymptotiquement stabilisé par la commande suivante :*

$$\alpha_\chi = k_\chi \sin \chi + k_{\psi_\chi} \psi'_\chi (y - y_0), \quad (4.39)$$

où ψ'_χ est donnée par $s \mapsto \text{sat}(s, -1, 1)$, avec k_χ et k_{ψ_χ} strictement positif.

Démonstration. À l’équilibre, le système commandé vérifie

$$\sin \chi = 0, \quad \psi'_\chi(0) = 0, \quad (4.40)$$

avec χ stabilisé à une valeur $\chi_e = 2n\pi$ ou $\chi_e = (2n + 1)\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$. Cependant, seuls les équilibres donnés par $\chi_e = 2n\pi$ sont stables.

En effet, considérons ensuite la fonction de Lyapunov

$$Y(y, \chi) = k_{\psi_\chi} (1 - \cos \chi) + a_0 \psi_\chi (y - y_0), \quad (4.41)$$

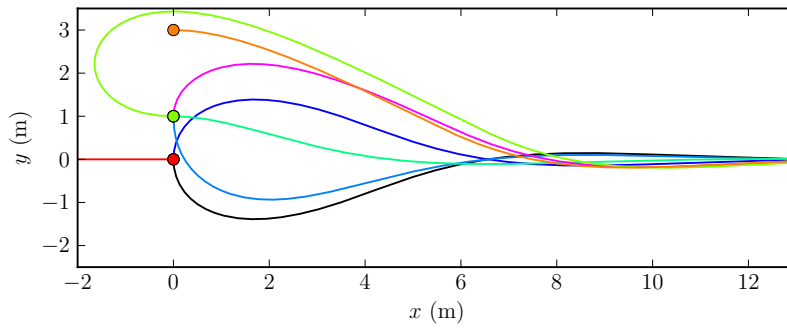


FIGURE 4.11 – Trajectoires, dans l'espace physique, d'un véhicule commandé par la loi de guidage (4.39). Le véhicule est initialisé à l'abscisse $x = 0$, pour différentes variations d'ordonnée y et de cap χ .

où $\psi_\chi(y - y_0) = \int_0^{y-y_0} \psi'_\chi(s) ds$. Sa dérivée le long des trajectoires vérifie

$$\widehat{Y}(y, \chi) = a_0 k_{\psi_\chi} \psi'_\chi(y - y_0) \sin \chi - a_0 \sin \chi (k_\chi \sin \chi + k_{\psi_\chi} \psi'_\chi(y - y_0)), \quad (4.42)$$

$$= -a_0 \sin^2 \chi, \quad (4.43)$$

ce qui établit la stabilité du point d'équilibre. L'instabilité des équilibres $(y_0, (2n + 1)\pi)$ s'établit directement à partir d'une étude locale. \square

Une illustration du comportement du véhicule commandé par la loi de guidage (4.39) est donnée Figure 4.11, pour différentes configurations de départ. On remarque que les débattements sont plus amples que dans le cas de la Figure 4.9, ce qui est une conséquence de la bornitude de la loi de commande. On remarque également que le respect de la périodicité du système à pour conséquence directe l'existence d'un point d'équilibre instable lorsque le véhicule est initialisé à $(y_0, (2n + 1)\pi)$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Cette synthèse par annulation résout une partie des contraintes du problème posé. Toutefois, elle ne possède pas la propriété de respecter une borne arbitrairement petite, évoluant en temps réel. Or, la Section 4.4 met en évidence la nécessité d'une telle propriété. Pour y parvenir, nous avons besoin de complexifier légèrement la commande (4.39) comme dans le résultat qui suit.

Proposition 4.2. *Pour toute initialisation $(y, \chi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, et quelque soit $\bar{\alpha}_\chi(t) > \epsilon > 0$, il existe un équilibre $(y_0, 2n\pi)$ pour le système (4.17), avec $n \in \mathbb{Z}$, tel qu'il soit asymptotiquement stabilisé par la commande suivante :*

$$\alpha_\chi = \bar{\alpha}_\chi(t)(1 - \lambda) \sin \chi + \psi'_\chi(y - y_0), \quad (4.44)$$

où ψ'_χ est donnée par $s \mapsto \text{sat}(k_{\psi_\chi} s, -\lambda \bar{\alpha}_\chi(t), \lambda \bar{\alpha}_\chi(t))$, avec k_χ et k_{ψ_χ} strictement positif, et $\lambda \in]0 ; 1[$. Par ailleurs, la commande α_χ reste à tout moment d'amplitude inférieure ou égale à $\bar{\alpha}_\chi(t)$.

Démonstration. Dans les situations où $k_{\psi_\chi} |y - y_0| < \lambda \bar{\alpha}_\chi(t)$, la preuve s'établit de la même façon que précédemment.

Le problème se pose dans le cas où $\psi'_\chi(y - y_0)$ sature. Puisque la valeur de saturation varie arbitrairement avec le temps, la preuve précédente ne s'applique pas. Toutefois, nous pouvons remarquer que lorsque $\psi'_\chi(y - y_0)$, les trajectoires sont à chaque instant de nature à attirer y vers l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} : |\psi'_\chi(y - y_0)| < \lambda \bar{\alpha}_\chi(t)\}$. En effet, supposons $y > y_0$ avec $\psi'_\chi(y - y_0)$ saturé à la valeur $\lambda \bar{\alpha}_\chi(t)$. Alors, le système

$$\dot{\chi} = -a_0 \bar{\alpha}_\chi(t) ((1 - \lambda) \sin \chi + \lambda) \quad (4.45)$$

possède un unique équilibre stable vérifiant $\sin \chi = -\lambda/(1 - \lambda)$. De ce fait, il existe une durée dt au delà de laquelle y décroît, entraînant la désaturation de $\psi'_\chi(y - y_0)$.

Le raisonnement opposé s'applique dans le cas où $y < y_0$. \square

4.8 Conclusion

Nous avons montré dans ce Chapitre comment les travaux développés au Chapitre 3 peuvent être étendus afin de synthétiser une commande de guidage en virage incliné (BTT) amenant la trajectoire du véhicule sur une consigne de vitesse, altitude et cap. De fait, l'extension est directe dans l'hypothèse où le véhicule évolue à dérapage nul. Cette configuration nous permet, en effet, de découpler les dynamiques longitudinale et latérale par un changement de variable afin de pouvoir les commander de façon indépendante. En pratique, cette indépendance est toutefois remise en cause par la nature des bornes imposées sur la valeur des commandes, ce qui nous a imposé le développement d'une loi de commande originale pour commander la dynamique latérale.

Cette loi de commande est robuste aux incertitudes, ce qui est une façon possible de s'affranchir des effets de la méconnaissance du coefficient de portance. Elle possède également des propriétés de bornitude, et nous disposons d'une grande latitude pour choisir ses gains de réglage sans que des « grand gains » aient été imposés par la synthèse.

Les conclusions que nous pouvons faire à ce stade sont donc similaires à celles formulées dans le cas de la commande en dimension réduite ; à savoir que nous obtenons des propriétés de stabilité semi-globales, sous une contrainte de prise d'incidence totale, sans que notre synthèse ne repose sur la connaissance exhaustive et parfaite du modèle du véhicule. Le résultat obtenu est ainsi une extension directe de la commande présentée au Chapitre 3, et nous avons proposé suffisamment de degrés de liberté pour permettre un réglage fin des propriétés asymptotiques d'une telle commande.

4.9 Perspectives

La loi de commande obtenue à l'issue de ce travail est une loi de guidage BTT. Il reste des étapes à accomplir afin de réaliser une loi de pilotage commandant directement les gouvernes du véhicule et s'appuyant sur l'étude de guidage précédemment décrite.

Cette étape pourrait par exemple être accomplie par *backstepping*, ou par une synthèse de commande plus simple, basée sur une hypothèse d'une séparation d'échelle de temps entre le pilotage et le guidage. Ce genre d'hypothèse permet d'obtenir un modèle de comportement triangulaire par bloc, afin de réaliser un pilote qui se limite à réaliser les consignes (incidence, roulis, dérapage) données par le guidage développé dans le présent chapitre. Un pilote de ce type est développé dans (Astolfi et al., 2008, Chapitre 9.3). Cependant, la technique de synthèse de commande employée par les auteurs est une technique d'annulation. La limite de ce genre de technique réside dans la nécessité de connaître les termes qu'il faut annuler ; c'est pourquoi les auteurs proposent d'ajouter un estimateur pour s'affranchir de la méconnaissance sur le système. Néanmoins, dans la mesure où les véhicules aérospatiaux sont conçus avec une marge statique positive, donc avec une dynamique dissipative, il nous semble intéressant et nécessaire d'étudier la synthèse de commande gradient au niveau du pilote, poursuivant en cela la démarche que nous avons menée au niveau du guidage.

Par ailleurs, la question du déphasage non minimal du modèle, induit par les effets de force directes des gouvernes, devra être reposée. Il est probable que la méthode que nous développons dans la sous-section 2.10.1 ne soit pas transposable de façon directe à un modèle en trois dimension, sauf si les effets de forces directes induites par des gouvernes latérales se révèlent négligeables. Pour l'affirmer, une étude basée sur des données aérodynamiques plus complète est nécessaire.

Enfin, dans un contexte différent qui relève plutôt de vols avec une forte manœuvrabilité, il serait intéressant de poursuivre des recherches sur la base de la Remarque 4.2. En effet, dans ce contexte il est avéré qu'un vol purement dérapé n'est pas satisfaisant pour manœuvrer le véhicule avec performance, mais il s'avère également qu'un vol non dérapé possède une singularité de commande, à incidence faible. Il est probable que seul un compromis entre ces deux stratégies de commande permettrait de tirer parti du meilleur des performances de tels véhicules.

Troisième partie

Vers une régulation de sortie

Motivation

Réaliser la régulation asymptotique robuste d'une sortie donnée d'un système dynamique revêt un intérêt pratique essentiel pour la plupart des systèmes commandés ; y compris en aéronautique. La plupart des problèmes de commandes sont en effet posés comme des problèmes de régulation. Il s'agit par exemple de réguler telle sortie à telle niveau de consigne, ou encore de maintenir nul l'écart entre une sortie et un signal de consigne. Pour parvenir à ces résultats dans le cas général, multi-variables et non linéaire, deux principales techniques de conception se retrouvent dans la littérature.

Pour les illustrer, supposons un système dynamique défini par

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x), \quad (5.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est la commande et $y \in \mathbb{R}^m$ désigne la sortie à réguler.

Au choix : ajout d'intégrateurs ...

La première famille de techniques suit le même esprit que la régulation linéaire industrielle. Elle consiste à intégrer l'erreur de sortie y avec un intégrateur $\dot{z} = y$, et à stabiliser une solution du système étendu

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{z} = y. \quad (5.2)$$

La convergence de la sortie à la valeur désirée est alors une conséquence directe de la stabilité asymptotique. Différentes techniques de stabilisation pour le système étendu ont été proposées, nous pouvons citer en particulier Khalil (2000) qui obtient des résultats de régulation semi-globale par retour de sortie en utilisant des techniques de commande « grand gain » et modes glissant.

... ou ajout d'observateurs

La seconde famille de techniques, se focalise sur l'entrée. On y suppose l'existence d'une valeur de commande qui maintient la sortie à la consigne, et on cherche à identifier cette inconnue. Pour cela, la dynamique du système est généralement réécrite de façon à faire apparaître une perturbation δ dans l'image de la commande puis un observateur de cette perturbation est adjoint au système :

$$\dot{x} = f(x, u + \delta), \quad \dot{\hat{\delta}} = l(x, y, \hat{\delta}, u). \quad (5.3)$$

De la sorte, annuler le terme d'erreur par la commande est suffisant pour résoudre le problème. C'est ce qui est réalisé à partir de l'observation de l'erreur de la commande, par exemple en posant $u = v(x) - \hat{\delta}$, où $v(x)$ est un bouclage stabilisant lorsque $\delta = 0$.

La théorie de la régulation peut être vue sous cette perspective. Les premiers résultats concernant des systèmes « faiblement » non linéaires sont dus à Francis et Wonham (1976), où il est montré que la commande intégrale est suffisante pour garantir la régulation de la sortie en présence de perturbations exogènes constantes, d'amplitude suffisamment faible. Depuis ces premiers résultats, la théorie de la régulation a été complétée pour constituer un cadre d'outils pour construire des régulateurs pour des systèmes non linéaires à déphasage minimal, y compris sous des hypothèses de perturbations non constantes. Les résultats les plus récents en matière de théorie non linéaire de régulation peuvent donc être appliqués à la stabilisation asymptotique robuste. Des exemples d'applications dans le contexte de l'aéronautique sont présentés dans Isidori et al. (2003).

Différents type d'observateurs de perturbation ont également été proposés en dehors de la théorie de la régulation. Il s'agit de travaux relativement isolés, mais ils ont pour stratégie commune de rejeter des perturbations présentes par hypothèse dans l'image de commande.

Ainsi, les travaux de Praly et Jiang (1998) et Chakraborty et Arcak (2007) introduisent un observateur d'une perturbation dans l'image de commande dans le but de la rejeter ; mais encore sous une hypothèse de déphasage minimal. D'ailleurs, Chakraborty et Arcak (2007) nécessite une connaissance parfaite du champs de vecteur d'entrée pour assurer la stabilisation asymptotique. Dans (Astolfi et al., 2008, Chapitre 7.2), les auteurs résolvent un problème similaire en utilisant un contrôleur dynamique, mais pour le système étendu la stabilisation est obtenue à l'aide d'une commande discontinue, et la robustesse de la régulation n'a pas été établie.

L'extension des techniques précédentes lorsque l'incertitude n'est pas dans l'image de commande fut réalisée à l'aide des techniques de commande adaptatives. Par exemple, dans Freeman et Kokotović (1996) les auteurs présentent une solution dans le cadre des systèmes linéarisables entrée/sortie sans dynamique inverse. Ceci est également proposé dans Jiang et Mareels (2001), où les auteurs autorisent la présence d'une dynamique inverse, sous une contrainte de stabilité entrée-état.

Bilan

Les travaux précédemment cités présentent des limites. D'une part, la plupart d'entre eux ne suivent pas une démarche itérative. De ce fait, la façon d'aborder le problème posé en vue d'obtenir la convergence de la sortie ne tire pas partie de l'éventuelle connaissance d'une loi de commande stabilisant l'équilibre du système. Or, nous avons vu que, dans le domaine aéronautique, les systèmes peuvent être relativement complexes. En conséquence, notre capacité à traiter un problème sans s'appuyer sur la connaissance de l'existant est limitée.

D'autre part, il apparaît que les travaux cités précédemment font des hypothèses fortes sur la structure des modèles considérés. Ainsi, soit le modèle considéré doit être à déphasage minimal¹, soit les perturbations considérées appartiennent à une classe restreinte.

Le chapitre suivant est donc dédié à l'étude d'une démarche permettant la synthèse de contrôleurs garantissant la stabilisation asymptotique robuste de l'équilibre d'un procédé incertain. Celle-ci est applicable sans hypothèse forte sur la structure des modèles, et applicable de façon itérative.

1. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans le cas d'un avion ou tout autre véhicule dont le centre de masse est commandé par des gouvernes placées en empennage.

Chapitre 5

Régulation asymptotique robuste par retour d'état

Résumé. Les travaux présentés dans les chapitres précédant mettent en évidence le besoin de traiter le contrôle des véhicules hypersoniques (HSV) comme un problème de régulation robuste. Nous montrons que la régulation robuste de la sortie d'un procédé à une consigne constante peut être accomplie en stabilisant la solution d'un modèle augmenté d'un intégrateur de la sortie, si le modèle dynamique est suffisamment proche du procédé considéré, au sens C^1 . Il s'agit d'étendre la structure de contrôle proportionnel-intégral (PI) au cas des systèmes non linéaires. Nous montrons ensuite que le *forwarding* est une technique bien adaptée pour ce cas particulier d'extension de modèle. Nous illustrons finalement la démarche obtenue en l'appliquant à différents problèmes posés dans le domaine de l'aéronautique. Ce chapitre est inspiré du travail présenté dans Poulain et Praly (2010).

5.1 Introduction

Nous avons recherché une démarche permettant la synthèse de contrôleurs garantissant la stabilisation asymptotique robuste de l'équilibre d'un procédé incertain. Notre objectif est d'avoir une technique applicable sans hypothèse forte sur la structure des modèles, et applicable de façon itérative. Pour cela, après avoir décrit le problème (Section 5.2), nous présentons l'approche par ajout d'intégrateur que nous proposons (Section 5.3). Ensuite nous rappelons des résultats de *forwarding* qui nous intéressent dans ce contexte (Section 5.4). Différents exemples d'application sont finalement présentés pour illustrer la démarche (Section 5.5).

5.2 Description du problème

Nous nous intéressons au problème de la régulation à l'origine, par retour d'état, d'une sortie y d'un processus dynamique donné. Le processus considéré satisfait l'équation dynamique

$$\dot{x} = \xi(x, u), \quad y = \zeta(x, u), \quad (5.5)$$

où l'état est $x \in \mathbb{R}^n$, la commande $u \in \mathbb{R}^m$ et la sortie $y \in \mathbb{R}^m$. Les fonctions $\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\zeta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont supposées de classe C^1 .

Nous supposons ne pas connaître le procédé précisément — c'est-à-dire les fonctions (ξ, ζ) — et nous concevons un retour d'état pour ce procédé à partir d'un modèle pris

sous la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (5.6)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions C^1 , et f et h s'annulent à l'origine. L'état x est supposé connu, et la sortie y définit m signaux qui doivent converger vers une référence constante. Dans la suite nous la considérerons nulle par commodité, mais sans perte de généralité.

Remarque 5.1. Tout au long de ce Chapitre, le terme *procédé* renvoie au système dynamique incertain (5.5) ; tandis que le terme *modèle* renvoie à l'expression mathématique — connue — du modèle (5.6).

5.3 Approche suggérée

Pour résoudre le problème de régulation de y à 0 dans le contexte incertain décrit ci-avant, nous suivons l'idée classique consistant à augmenter le modèle avec un intégrateur pur. Précisément, nous concevons un retour d'état qui stabilise l'origine du système ²

$$\dot{z} = k(x, y), \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (5.7)$$

où $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction à déterminer, qui vérifie

$$\forall x \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n, \quad k(x, h(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = 0, \quad (5.8)$$

où \mathcal{N} est un voisinage de l'origine, à définir.

Grâce au résultat donné par le Théorème 5.1 donné ci après, nous pouvons conclure dans le Théorème 5.2 qu'un retour d'état conçu pour le modèle (5.7) résout le problème de régulation pour toute une famille de procédés avoisinants, dans un sens à définir, si l'origine du modèle est exponentiellement stable en boucle fermée.

Théorème 5.1. Soit $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ une fonction de classe C^1 et telle que l'origine est un équilibre exponentiellement stable de :

$$\dot{x} = \hat{\varphi}(x) \quad (5.9)$$

avec \mathcal{A} comme bassin d'attraction. Pour tout réel strictement positif ε , il existe un réel strictement positif δ et un voisinage \mathcal{N} de l'origine tels que, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ de classe C^1 qui vérifie

$$|\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)| \leq \delta, \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(x) \right| \leq \delta, \quad \forall x \in \mathcal{N}, \quad (5.10)$$

il existe $x_e \in \mathbb{R}^n$ qui est un équilibre exponentiellement stable de

$$\dot{x} = \varphi(x) \quad (5.11)$$

dont le bassin d'attraction contient l'ensemble \mathcal{A} réduit de ε

$$\{x \in \mathcal{A} : \text{dist}(x, \partial \mathcal{A}) > \varepsilon\}. \quad (5.12)$$

Démonstration. Le résultat est une combinaison de deux résultats classiques sur la stabilité totale et l'hyperbolicité. La preuve que nous donnons ici possède d'ailleurs des points communs avec (Khalil, 2002, Section 14.1.4).

Soit P une matrice définie positive et $a \in \mathbb{R}_*^+$ un réel strictement positif satisfaisant :

$$P \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(0) + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(0)^\top P \leq -aP, \quad \lambda(P) = 1, \quad (5.13)$$

2. L'intérêt pratique de remplacer h par k sera illustré à la Section 5.5.

où les notations $\bar{\lambda}$ et $\underline{\lambda}$ désignent respectivement les valeurs propres maximum et minimum. Par continuité, il existe un réel strictement positif $p_0 \in \mathbb{R}_*^+$ tel que nous ayons, $\forall x : x^\top P x \leq p_0$,

$$P \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(x) + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(x)^\top P \leq -\frac{a}{2}P, \quad \text{et} \quad x^\top P \hat{\varphi}(x) \leq -\frac{a}{4}x^\top P x. \quad (5.14)$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ un fonction C^1 . Nous avons :

$$x^\top P \varphi(x) = x^\top P \hat{\varphi}(x) + x^\top P [\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)], \quad (5.15)$$

$$\leq x^\top P \hat{\varphi}(x) + \frac{a}{8}x^\top P x + \frac{2}{a}[\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)]^\top P [\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)] \quad (5.16)$$

et par conséquent :

$$x^\top P \varphi(x) \leq -\frac{a}{16}x^\top P x, \quad \forall x : x^\top P x = \frac{p_0}{6}, \quad (5.17)$$

si φ satisfait :

$$|\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)| \leq \frac{a}{4} \sqrt{\frac{p_0}{12\bar{\lambda}(P)}}, \quad \forall x : x^\top P x = \frac{p_0}{6}. \quad (5.18)$$

Dans ces conditions, le compact $\{x : x^\top P x \leq p_0/6\}$ difféomorphe à une boule de \mathbb{R}^r est positivement invariant. D'après (Hale, 1980, Chapter I, Theorem 8.2, page 48), nous avons alors que, pour chaque fonction φ satisfaisant (5.18), il existe au moins un point d'équilibre x_e satisfaisant

$$\varphi(x_e) = 0, \quad x_e^\top P x_e \leq \frac{p_0}{6}. \quad (5.19)$$

Supposons également que φ satisfasse :

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(x) \right| \leq \frac{a}{8\bar{\lambda}(P)}, \quad \forall x : x^\top P x \leq p_0. \quad (5.20)$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} P \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(x) + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(x)^\top P + P \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(x) \right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) - \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}(x) \right]^\top P \\ = P \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)^\top P \leq -\frac{a}{4}P, \quad \forall x : x^\top P x \leq p_0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Notons aussi que nous avons :

$$[x_e + s(x - x_e)]^\top P [x_e + s(x - x_e)] \leq p_0, \quad (5.22)$$

$$\forall (x, x_e, s) : s \in [0; 1], \quad x_e^\top P x_e \leq \frac{p_0}{6}, \quad x^\top P x \leq \frac{p_0}{3}. \quad (5.23)$$

Alors, avec

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_e) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_e + s(x - x_e)) ds [x - x_e], \quad (5.24)$$

et (5.19), nous obtenons :

$$[x - x_e]^\top P \varphi(x) = \int_0^1 \left([x - x_e]^\top P \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_e + s(x - x_e)) [x - x_e] \right) ds, \quad (5.25)$$

$$\leq -\frac{a}{4} [x - x_e]^\top P [x - x_e], \quad \forall x : x^\top P x \leq \frac{p_0}{3}. \quad (5.26)$$

Ceci implique que x_e est un équilibre exponentiellement stable du système (5.11) avec un bassin d'attraction contenant l'ensemble compact $\{x \in \mathbb{R}^r : x^\top P x \leq \frac{p_0}{3}\}$.

Finalement, d'après l'hypothèse sur $\hat{\varphi}$ nous savons qu'il existe une fonction $V : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 , définie positive et satisfaisant :

$$\lim_{x \rightarrow \partial \mathcal{A}} V(x) = +\infty, \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x} \hat{\varphi}(x) \leq -V(x), \quad \forall x \in \mathcal{A}. \quad (5.27)$$

Alors, soit v_0 et v_∞ deux réels strictement positifs tels que nous ayons :

$$v_0 < v_\infty, \quad (5.28)$$

$$x^\top P x \leq \frac{p_0}{3}, \quad \forall x \in \mathcal{A} : V(x) \leq v_0 \quad (5.29)$$

$$d(x, \partial \mathcal{A}) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathcal{A} : V(x) \geq v_\infty. \quad (5.30)$$

D'après (5.27) et puisque l'ensemble

$$C = \{x \in \mathcal{A} : v_0 \leq V(x) \leq v_\infty\} \quad (5.31)$$

est un sous-ensemble compact de \mathcal{A} où V est C^1 ,

$$G = \sup_{x \in C} \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right| \quad (5.32)$$

est défini, réel et strictement positif. Nous avons donc :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) \varphi(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \hat{\varphi}(x) + \frac{\partial V}{\partial x}(x) [\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)] \quad (5.33)$$

$$\leq -V(x) + G \sup_{x \in C} |\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)|, \quad \forall x \in C. \quad (5.34)$$

Ainsi, si φ satisfait également :

$$|\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)| \leq \frac{\inf_{x \in C} V(x)}{2G} = \frac{\inf_{x \in C} V(x)}{2 \sup_{x \in C} \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right|} \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad (5.35)$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) \varphi(x) \leq -\frac{1}{2} V(x) \quad \forall x \in C. \quad (5.36)$$

□

À partir du Théorème 5.1, nous pouvons établir la stabilisation asymptotique robuste de l'équilibre du système (5.7) étendu par un intégrateur.

Théorème 5.2. *Supposons que nous ayons conçu une fonction $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que l'origine est un équilibre exponentiellement stable de :*

$$\dot{z} = k(x, h(x)), \quad \dot{x} = f(x) + g(x)\psi(x, z), \quad (5.37)$$

avec $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^m$ pour domaine d'attraction. Sous cette condition, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel strictement positif δ et un voisinage de l'origine \mathcal{N} tel que, pour toute paire (ξ, ζ) de fonctions C^1 qui satisfont

$$|k(x, h(x)) - k(x, \zeta(x, \psi(x, z)))| + |[f(x) + g(x)\psi(x, z)] - \xi(x, \psi(x, z))| \leq \delta, \quad (5.38)$$

pour tout $(x, z) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m$ et

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \\ g \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \psi + g \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \right| \leq \delta, \quad (5.39)$$

pour tout (z, x) dans \mathcal{N} , nous pouvons associer (x_e, z_e) qui est un équilibre exponentiellement stable de

$$\dot{z} = k(x, \zeta(x, \psi(x, z))), \quad \dot{x} = \xi(x, \psi(x, z)), \quad (5.40)$$

dont le bassin d'attraction contient l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x, z) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m : d((x, z), \partial(\mathcal{D} \times \mathbb{R}^m)) > \varepsilon\}. \quad (5.41)$$

De plus, sous les conditions précédentes et (5.8), toute solution $(X((x, z), t), Z((x, z), t))$ issue de (5.40) avec des conditions initiales dans l'ensemble \mathcal{A} vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \zeta(X((x, z), t), \psi(X((x, z), t), Z((x, z), t))) = 0. \quad (5.42)$$

Démonstration. Avec les notations

$$x = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} k(x, h(x)) \\ f(x) + g(x)u \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} k(x, \zeta(x, u)) \\ \xi(x, u) \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

nous voyons que toutes les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites. Il suit que si une paire de fonctions (ξ, ζ) satisfait les conditions de proximité (5.38) et (5.39), alors il existe un point d'équilibre (x_e, z_e) asymptotiquement stable ayant \mathcal{A} pour bassin d'attraction, caractérisé par (5.41), et qui satisfait

$$k(x_e, \zeta(x_e, \psi(x_e, z_e))) = 0. \quad (5.44)$$

Par conséquent, pour toute condition initiale (x, z) dans \mathcal{A} , la solution issue du procédé (5.40) en boucle fermée et notée $(X((x, z), t), Z((x, z), t))$ est définie sur $[0 ; +\infty)$, converge vers (x_e, z_e) .

Par ailleurs, la sortie y converge vers le plus grand invariant vérifiant

$$\{(x, z) \in \mathcal{N} : k(x, \zeta(x, \psi(x, z))) = 0\}. \quad (5.45)$$

La condition (5.8) implique donc la convergence de la sortie à l'origine donnée par (5.42). \square

5.4 Détermination de la commande du système étendu

Dans cette section nous discutons de possibles conceptions de retours d'état qui stabilisent l'origine du système commandé (5.37) de façon à garantir les hypothèses du Théorème 5.2.

Le système étendu (5.7) possède une structure bloc-triangulaire qui a été largement étudiée au cours des années 1990, avec en particulier l'introduction des techniques de *backstepping* (voir Krstic et al. (1995) pour une présentation) et de *forwarding*. Cette dernière a été développée de différentes manières. Notamment i) en utilisant des conceptions de type Lyapunov avec un terme de couplage dans Jankovic et al. (1996); ii) par changement de coordonnées dans Mazenc et Praly (1996); iii) en utilisant des saturations dans Teel (1996). Nous nous appuyerons dans nos travaux sur ces deux dernières techniques. L'intérêt que nous avons porté aux techniques de *forwarding* est dû à la possibilité qu'elles offrent de simplement « étendre » un contrôleur existant qui stabilise l'origine de (5.6) par retour d'état statique. Dans la suite, nous nommons $\phi(x)$ ce contrôleur.

Hypothèse 5.1 (Stabilité de l'équilibre du système contrôlé statiquement). Nous connaissons une fonction continue $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que l'origine est un équilibre asymptotiquement et localement exponentiellement stable de

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x), \quad (5.46)$$

avec \mathcal{D} comme bassin d'attraction.

En conséquence de cette hypothèse, en utilisant le théorème de Lyapunov inverse de Kurzweil (1956), il existe une fonction $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 qui est définie positive et propre sur \mathcal{D} et telle que la fonction $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$U(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)\phi(x)) \quad (5.47)$$

est définie positive sur \mathcal{D} .

Une autre conséquence de l'Hypothèse 5.1 est l'existence d'une fonction $M : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 et satisfaisant

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x) (f(x) + g(x)\phi(x)) = k(x, h(x)), \quad M(0) = 0. \quad (5.48)$$

En fonction de la connaissance que nous avons de cette fonction, c'est-à-dire si nous nous sommes capable de résoudre l'équation ou seulement son approximation au premier ordre, et en fonction de la connaissance que nous avons de (5.47), nous obtenons différentes conceptions inspirées des travaux de Mazenc et Praly (1996) et Teel (1996).

Hypothèse 5.2 (Rang du gain statique). La matrice

$$\left(\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} [f + g\phi] \right)^{-1} g \Big|_{x=0} \quad (5.49)$$

est inversible à droite.

5.4.1 Forwarding avec V et M connues

Proposition 5.1. *Lorsque à la fois V et M sont connues, une commande stabilisant l'équilibre du système (5.7) est donnée par*

$$u = \phi(x) - L \left([L_g V(x) - (z - M(x))^\top L_g M(x)]^\top \right), \quad (5.50)$$

avec M définie par (5.48), et avec L n'importe quelle fonction continue satisfaisant

$$v^\top L(v) > 0, \quad \forall v \neq 0, \quad \det \left(\frac{\partial L}{\partial v}(0) \right) \neq 0. \quad (5.51)$$

Démonstration. En suivant Mazenc et Praly (1996), la preuve de ceci est établie avec la fonction $W : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$W(x, z) = V(x) + \frac{1}{2} (z - M(x))^\top (z - M(x)), \quad (5.52)$$

qui est définie positive et propre sur $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^m$. Sa dérivée le long des trajectoires vérifie

$$\dot{W}(x, z) = -U(x) + [L_g V(x) - (z - M(x))^\top L_g M(x)] (u - \phi(x)), \quad (5.53)$$

qui, du fait de l'Hypothèse 5.1 est définie négative pour u donné par (5.50).

Par ailleurs, conséquemment à l'Hypothèse 5.1, $L_g M(x)$ est inversible dans un voisinage de l'origine. La dérivée de $W(x, z)$ le long des trajectoires y est donc supérieurement bornée par une quadratique, ce qui permet de conclure la stabilité localement exponentielle de l'équilibre $(x, z) = (0, 0)$. \square

5.4.2 Forwarding avec V inconnue mais M connue

La connaissance de V n'est en fait pas requise pour stabiliser le système étendu. Comme montré ci-après, la conséquence du manque d'information sur V peut être limitée par une hypothèse supplémentaire sur le gain.

Proposition 5.2. *Lorsque seul M est connu, il existe une fonction scalaire strictement positive $k_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ telle qu'une commande stabilisant l'équilibre du système (5.7) soit*

$$u = \phi(x) + k_i(x)L_g M(x)^\top L(z - M(x)), \quad (5.54)$$

avec M définie par (5.48), et avec L n'importe quelle fonction continue satisfaisant (5.51).

Démonstration. Voir aussi (Mazenc et Praly, 1996, Prop. III.4). Le résultat est obtenu avec la fonction de Lyapunov $W : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$W(x, z) = V(x) + \int_0^{z-M(x)} L(v)dv, \quad (5.55)$$

(5.52), qui est définie positive et propre sur $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^m$. En la dérivant et en complétant les carrés, nous obtenons

$$\dot{W}(x, z) \leq -U(x) + \frac{k_i}{2} |L_g V|^2 - \frac{k_i}{2} \left| L(z - M)^\top L_g M \right|^2. \quad (5.56)$$

Choisir $k_i \leq U(x)/|L_g V(x)|^2, \forall x \in \mathcal{D} : |L_g V(x)| \neq 0$ est alors toujours possible, puisque U est localement inférieurement bornée par une quadratique. La dérivée de $W(x, z)$ le long des trajectoires est donc définie négative et localement supérieurement bornée par une quadratique, ce qui permet de conclure la stabilité exponentielle de l'équilibre $(x, z) = (0, 0)$. \square

5.4.3 Forwarding avec V inconnue et M approchée

L'implantation des deux approches précédentes se heurte en pratique à une complication de taille : la résolution de l'équation aux dérivées partielles (5.48).

Au lieu de résoudre l'équation aux dérivées partielles (5.48) pour obtenir M , nous pouvons donc nous restreindre à résoudre l'équation linéaire

$$M_0 \frac{\partial}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} (k(x, h(x))) \Big|_{x=0}. \quad (5.57)$$

Grâce à l'Hypothèse 5.2, ceci est toujours possible.

Approche Lyapunov

En suivant Mazenc et Praly (1996), il existe une fonction scalaire $k_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs strictement positives telle qu'un retour d'état pour le système (5.7) est donné par

$$u = \phi(x) + k_i(x)M_0^\top g(x)^\top L(z - M_0 x), \quad (5.58)$$

avec $M_0 : \mathbb{R}^{m \times n}$ définie par (5.57), et avec L une fonction continue, bornée et satisfaisant (5.51).

Approche par interconnexion

Dans le cas où il existe un réel positif Δ tel que le système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(\phi(x) + v), \quad (5.59)$$

est stable entrée-état par rapport au signal v tel que $|v| < \Delta$, alors en suivant Teel (1996), un retour d'état pour le système (5.7) est donné par

$$u = \phi(x) + \lambda L \left(\frac{g(0)^\top M_0^\top (z - M_0 x)}{\lambda} \right), \quad (5.60)$$

où L est une fonction continue et bornée, satisfaisant (5.51) et où $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ est un réel strictement positif sélectionné suffisamment petit.

5.4.4 Lien avec la technique d'observateur de perturbation

L'approche proposée dans la sous-section 5.4.2 pour le cas où V est inconnue peut aussi être étudiée en utilisant un observateur de perturbation. Pour cela, il faut considérer le cas où il existe un biais δ dans l'image de la commande du système (5.6), c'est-à-dire que sa dynamique vérifie

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u + \delta), \quad \dot{\delta} = 0. \quad (5.61)$$

Supposons qu'il existe une fonction K de classe C^1 , une matrice carrée N et une matrice définie positive P satisfaisants

$$PNL_gK(x) + [NL_gK(x)]^\top P < 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}. \quad (5.62)$$

Notons que cette condition est vraie pour tout x suffisamment proche de l'origine, grâce à l'Hypothèse 5.2, si nous choisissons

$$K(x) = M(x) \quad N = -L_gM(0)^\top, \quad (5.63)$$

où $M(x)$ est définie par (5.48).

Alors, un observateur d'ordre réduit pour δ est donné par

$$\dot{z} = [L_fK(x) + L_gK(x)u] + L_gK(x)N[z - K(x)], \quad (5.64)$$

$$\hat{\delta} = N[z - K(x)]. \quad (5.65)$$

En effet, nous avons

$$(\hat{\delta} - \delta)^\top P(\hat{\delta} - \delta) < 0. \quad (5.66)$$

En annulant $\hat{\delta}$ par la commande, nous obtenons le bouclage d'état dynamique

$$\dot{z} = L_fK(x) + L_gK(x)\phi(x), \quad u = \phi(x) - N[z - K(x)]. \quad (5.67)$$

De la sorte, nous retrouvons précisément (5.54) si nous sélectionnons

$$K(x) = M(x), \quad L(z - M(x)) = -(z - M(x)), \quad N = -k_i(x)L_gM(x)^\top. \quad (5.68)$$

Ce lien avec un observateur d'ordre réduit donne une autre vision du rôle joué par k_i . En particulier, nous comprenons que la valeur en x pour $k_i(x)$ devrait être telle que soit ce terme est nul, ou soit le terme $k_i(x)L_gM(x)^\top$ est suffisamment proche de $k_i(0)L_gM(0)^\top$ pour assurer la stabilité de l'observateur. Ainsi nous obtenons

$$PL_gM(0)^\top L_gM(x) + [L_gM(0)^\top L_gM(x)]^\top P > 0. \quad (5.69)$$

5.5 Exemples d'applications

5.5.1 Stabilisation de l'oscillateur de Zhukovskii

Telle qu'elle a été présentée au Chapitre 3, la dynamique de l'oscillateur de Zhukovskii est une première approximation de la dynamique longitudinale du vol d'un avion. Celle-ci est donnée par

$$\dot{V} = e - \sin \gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{lV^2 - \cos \gamma}{V}, \quad (5.70)$$

où $V \in \mathbb{R}_*^+$ est la vitesse et $\gamma \in \mathbb{R}$ est la pente de vitesse. Les commandes sont le facteur de portance l et le facteur de propulsion e . Ce système possède des solutions périodiques stables pour des valeurs fixées $e = 0$ et $l = V_0^{-2} > 0$. En effet, il peut facilement être vérifié que l'équilibre $(\gamma = 0, V_0)$ est stable en utilisant la fonction énergie

$$W(V, \gamma) = V^3 + 2V_0^3 - 3VV_0^2 \cos(\gamma), \quad (5.71)$$

qui est définie non négative pour tout $(V, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi; \pi]$ et ne s'annule qu'en $(V, \gamma) = (V_0, 0)$, et dont les sous ensembles de niveau ne contiennent aucun point avec $V \leq 0$ si $W(V, \gamma) < 2V_0^3$. Un simple calcul montre que $W(V, \gamma)$ est constante le long des trajectoires.

Définition d'un contrôleur statique

Cette propriété de stabilité peut être exploitée pour concevoir un contrôleur

$$l = L(V, \gamma) = \frac{1}{V_0^2} - \frac{V^2}{V_0^4} \sin \gamma, \quad e = E(V, \gamma) = \cos \gamma - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2, \quad (5.72)$$

qui rend l'équilibre $(V_0, 0)$ exponentiellement stable avec un domaine d'attraction contenant l'ensemble $\{(V, \gamma) : V > 0, W(V, \gamma) < 2V_0^3\}$. En effet, la dérivée de $W(V, \gamma)$ le long des trajectoires étant

$$\dot{W}(V, \gamma) = 3(V^2 - V_0^2 \cos \gamma)e + 3V^2 V_0^2 \sin \gamma (l - V_0^{-2}), \quad (5.73)$$

elle est définie négative par la commande (5.72).

Définition d'une action intégrale

La dynamique (5.70) du mode longitudinal du véhicule étant seulement une approximation, l'équilibre stabilisé avec le contrôleur (5.72), même s'il existe, est susceptible d'être différent de celui commandé. Puisque la convergence de la pente de vitesse est d'un intérêt pratique évident dans le cadre d'un vol de croisière, nous choisissons cette variable comme sortie à réguler. Dans le but d'appliquer la méthode proposée à la Section 5.4, nous devons définir des fonctions M et k qui vérifient

$$\frac{\partial M}{\partial V}(E(V, \gamma) - \sin \gamma) + \frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{V_0^2} \sin \gamma\right) \frac{V^2}{V_0^2} - \cos \gamma}{V} = k(V, \gamma), \quad (5.74)$$

et

$$k(V, \gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0. \quad (5.75)$$

Nous observons qu'en sélectionnant

$$k(V, \gamma) = - \left(\frac{\partial M}{\partial V} + \frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{V^3}{V_0^4} \right) \sin \gamma + E(V, \gamma)(1 - \cos \gamma) \frac{\partial M}{\partial V}, \quad (5.76)$$

qui satisfait (5.75) dans le domaine d'intérêt, l'équation au dérivées partielles (5.74) est réduite à

$$\frac{\partial M}{\partial V} E(V, \gamma) \cos \gamma - \frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{1}{V} E(V, \gamma) = 0, \quad (5.77)$$

pour laquelle

$$M(V, \gamma) = \ln(V) + \sin(\gamma) - \ln(V_0) \quad (5.78)$$

est une solution. De plus, avec ce choix pour k , le modèle contrôlé par (5.72) vérifie la condition de rang sur le gain statique.

Le contrôleur, augmenté de l'action intégrale, devient alors

$$\dot{z} = k(V, \gamma) = - \left(\frac{1}{V} + \frac{V^3}{V_0^4} \cos \gamma \right) \sin \gamma + \frac{1}{V} (1 - \cos \gamma) \left(\cos \gamma - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \right), \quad (5.79a)$$

$$e = E(V, \gamma) = \cos \gamma - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2, \quad (5.79b)$$

$$\begin{aligned} l &= L(V, \gamma) + \frac{\partial M}{\partial \gamma} V(z - M(V, \gamma)) \\ &= V_0^{-2} - V^2 \sin \gamma + V \cos \gamma (z - (\ln(V) + \sin(\gamma) - \ln(V_0))). \end{aligned} \quad (5.79c)$$

Il garantit la régulation asymptotique de la sortie du procédé si ce dernier est suffisamment proche du modèle (5.70), dans un sens \mathcal{C}^1 défini par (5.38) et (5.39).

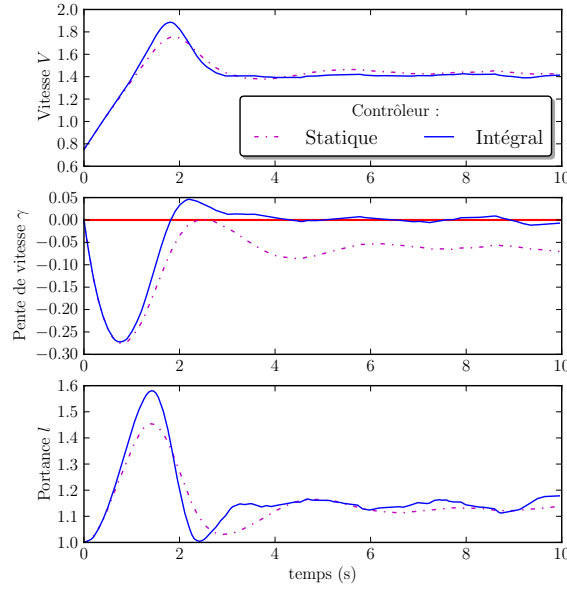


FIGURE 5.1 – Simulation de l'oscillateur de Zhukovskii dans des conditions perturbées (i) sans action intégrale (trait d'axe) ; (ii) avec l'action intégrale (trait plein).

Simulation

Les résultats de simulation sont présentés en Figure 5.1, pour une valeur de gain choisie *a priori* sans optimisation préalable. Le procédé simulé est défini par

$$\varepsilon \dot{\hat{l}} = l - \hat{l}, \quad (5.80a)$$

$$\dot{V} = e \cos \alpha - \sin \gamma + (\cos \alpha - \varepsilon) \hat{l}^2 V^2, \quad (5.80b)$$

$$V \dot{\gamma} = \varepsilon \hat{l} V^2 - \cos \gamma + e \sin \alpha, \quad (5.80c)$$

avec $\alpha = \arcsin(\hat{l}/\mu) + \nu$; $\varepsilon = 0,33$; $\epsilon = 0,6$; $\nu = 0,2$; $\mu = 5$. Ces coefficients sont représentatifs de simplifications de modèle ainsi que d'incertitudes de modélisation relativement importantes. L'aérodynamique du véhicule est mise à l'échelle par ϵ et la direction de la poussée, supposée colinéaire au vecteur vitesse au niveau du modèle, est orienté par l'angle d'incidence α . De plus, des bruits de mesure filtrés ont été ajoutés, ainsi qu'une dynamique d'actionneur (5.80a).

Ces résultats illustrent que le contrôleur (5.72) stabilise effectivement les trajectoires du système autour d'un point d'équilibre, mais que celles-ci conservent un écart à la consigne qui est révélateur de l'absence d'action intégrale. En utilisant le contrôleur (5.79) avec action intégrale, la convergence asymptotique vers la consigne est obtenue pour la pente de vitesse. On note par ailleurs que l'ajout d'intégrateur par la technique de *forwarding* ne semble pas dénaturer le comportement du système en boucle fermée. Les trajectoires issues des deux contrôleurs sont relativement comparables.

5.5.2 Stabilisation du mode longitudinal d'un avion

L'exemple développé dans la section précédente peut être directement étendu à la stabilisation du mode phugoïde, étudié au Chapitre 3.

Pour cela, on peut reconsidérer le système (3.35), dans le cas particulier où $g = 1$ et $\Lambda(V) = V^2$. Ceci nous amène à considérer le modèle

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad \dot{V} = e - \sin \gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{lV^2 - \cos \gamma}{V}, \quad (5.81)$$

où l'état est donné par la vitesse $V \in \mathbb{R}_+^*$, la pente de vitesse $\gamma \in \mathbb{R}$ et l'altitude $h \in \mathbb{R}$. Les commandes sont le facteur de portance l et le bilan aéro-propulsif e .

Définition d'un contrôleur statique

Suivons la démarche déjà présentée. Définissons la fonction $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S}$ par

$$W(h, V, \gamma) = V^3 + 2V_0^3 - 3VV_0^2 \cos(\gamma) + \int_0^{h-h_0} \text{sat}(s) ds. \quad (5.82)$$

En la dérivant, nous montrons que l'équilibre $(h_0, V_0, \gamma = 0)$ est stabilisé par la commande

$$l = L(h, V, \gamma) = \frac{1}{V_0^2} - \frac{V^2}{V_0^4} \sin \gamma - \frac{1}{V} \text{sat}(h - h_0), \quad e = E(V, \gamma) = \cos \gamma - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2, \quad (5.83)$$

avec un bassin d'attraction contenant $\{(h, V, \gamma) : h \in \mathbb{R}, V > 0, W(h_0, V, \gamma) < 2V_0^3\}$ (voir Proposition 3.3, page 50). Une étude locale montre par ailleurs que l'équilibre $(h_0, V_0, 0)$ est exponentiellement stable.

Définition d'une action intégrale

De la même façon que dans l'exemple précédent, nous souhaitons ajouter un intégrateur pour que l'altitude réalisée à l'équilibre soit le plus proche possible de la consigne h_0 , de sorte que la croisière effectivement réalisée soit bien celle commandée. Nous choisissons donc $h - h_0$ comme sortie à réguler. Dans le but d'appliquer la méthode proposée à la Section 5.4, nous devons définir des fonctions M et k qui vérifient

$$\frac{\partial M}{\partial h} V \sin \gamma + \frac{\partial M}{\partial V} (E(V, \gamma) - \sin \gamma) + \frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{L(h, V, \gamma) V^2 - \cos \gamma}{V} = k(h, V, \gamma). \quad (5.84)$$

Pour cela, sélectionnons

$$k(h, V, \gamma) = \text{sat}(h - h_0) \cos \gamma + \frac{1}{V} (1 - \cos \gamma) E(V, \gamma) - \sin \gamma \left(\frac{1}{V} + \frac{V^3}{V_0^4} \cos \gamma \right), \quad (5.85)$$

et ensuite résolvons

$$\frac{\partial M}{\partial V} E(V, \gamma) \cos \gamma - \frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{1}{V} E(V, \gamma) = 0. \quad (5.86)$$

Ceci mène, comme dans l'exemple précédent, à

$$M(h, V, \gamma) = \ln(V) + \sin(\gamma) - \ln(V_0). \quad (5.87)$$

Remarque 5.2. Nous pouvons remarquer que dans le cas présent, la condition (5.8) n'est pas vérifiée, puisque $k(h, V, \gamma) = 0 \not\Rightarrow h = h_0$. Ceci étant, nous avons nécessairement la convergence vers le plus grand ensemble invariant vérifiant (5.45). Or, la pente de vitesse étant nulle à l'équilibre, nous pouvons vérifier que $k(h, V, \gamma) \equiv 0 \Rightarrow h = h_0$, ce qui établit la convergence asymptotique vers la consigne. Cet exemple montre comment nous pouvons relâcher la condition (5.6) en faisant des hypothèses supplémentaires sur la nature de la perturbation de modèle sous laquelle la sortie va converger. Dans ce cas précis, cette hypothèse est en fait une conséquence des équations de cinématique.

Le contrôle obtenu est donc

$$\dot{z} = k(h, V, \gamma), \quad (5.88a)$$

$$e = \cos \gamma - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2, \quad (5.88b)$$

$$l = \frac{1}{V_0^2} - \frac{V^2}{V_0^4} \sin \gamma - \frac{1}{V} \text{sat}(h - h_0) + V \cos \gamma (z - M(h, V, \gamma)), \quad (5.88c)$$

avec

$$M(h, V, \gamma) = \ln(V) + \sin(\gamma) - \ln(V_0), \quad (5.89a)$$

$$k(h, V, \gamma) = \text{sat}(h - h_0) \cos \gamma + \frac{1}{V} (1 - \cos \gamma) E(V, \gamma) - \sin \gamma \left(\frac{1}{V} + \frac{V^3}{V_0^4} \cos \gamma \right). \quad (5.89b)$$

Simulation

Les résultats de simulation sont présentés en Figure 5.2, pour une valeur de gain choisie *a priori* sans optimisation préalable. Le procédé simulé est défini par

$$h = V \sin \gamma, \quad (5.90a)$$

$$\varepsilon \dot{\hat{l}} = l - \hat{l}, \quad (5.90b)$$

$$\dot{V} = e \cos \alpha - \sin \gamma + (\cos \alpha - \varepsilon \rho(h)) \hat{l}^2 V^2, \quad (5.90c)$$

$$V \dot{\gamma} = \varepsilon \hat{l} \rho(h) V^2 - \cos \gamma + e \sin \alpha. \quad (5.90d)$$

avec $\rho(h) = e^{\lambda h} / e^{\lambda h_0}$ modélisant une atmosphère hétérogène, $\alpha = \arcsin(\hat{l}/\mu) + \nu$ et

$$\lambda = -0,15, \quad \varepsilon = 0,33, \quad \epsilon = 0,6, \quad \nu = 0,2, \quad \mu = 5. \quad (5.91)$$

Comme dans l'exemple précédent, ces coefficients sont représentatifs de simplifications de modèle ainsi que d'incertitudes de modélisation relativement élevées. L'aérodynamique du véhicule est mise à l'échelle par ϵ et la direction de la poussée, supposée dans le modèle colinéaire au vecteur vitesse, est orienté par l'angle d'incidence α . De plus, des bruits de mesure filtrés ont été ajoutés, ainsi qu'une dynamique d'actionneur sur le facteur de portance l .

De la même façon que dans l'exemple précédent, la convergence asymptotique obtenue pour l'altitude est assurée en utilisant le contrôleur (5.88) avec action intégrale, alors que le contrôleur (5.81) sans action intégrale ne fait que stabiliser les trajectoires dans un voisinage de la consigne. De nouveau, on ne constate pas de différence majeure sur le comportement des solutions entre les deux contrôleurs utilisés.

5.5.3 Stabilisation d'un PVTOL

Un modèle de PVTOL, schématisé Figure 5.3, est donné dans (Isidori et al., 2003, Section 3.2) par

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{v}_x = -\frac{F}{m} \sin \theta + \epsilon_1 \frac{T}{m} \cos \theta, \quad (5.92a)$$

$$\dot{z} = v_z, \quad \dot{v}_z = \frac{F}{m} \cos \theta + \epsilon_1 \frac{T}{m} \sin \theta - g, \quad (5.92b)$$

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = \frac{T}{J} \epsilon_2, \quad (5.92c)$$

où $\epsilon_1 \approx 0$ et $\epsilon_2 \approx 1$ modélisent un dés-alignement de la poussée dans le repère engin. Les commandes de ce modèle sont la force F et le couple T . Nous voulons construire une loi de commande qui régule la position (x, z) du PVTOL à une référence donnée (x_0, z_0) . Pour cela, on propose de négliger l'influence de ϵ_1 dont la présence complique hautement la réalisation de la loi de commande, et nous supposons la masse m , le moment J et ϵ_2 unitaires. Aussi, nous supposons que les valeurs admissibles pour T sont telles qu'elles permettent l'existence d'une séparation d'échelle de temps entre la dynamique de rotation et la dynamique de vitesse, nous autorisant ainsi à implanter un contrôle hiérarchique.

Remarque 5.3. La commande d'un PVTOL est un sujet qui a déjà été largement abordé dans la littérature dans le domaine automatique. Le présent exemple a pour seul objet d'illustrer la démarche de l'ajout d'une action intégrale à un contrôleur déjà existant.

Définition d'un contrôleur statique

Considérons la fonction de Lyapunov

$$W(x, z, v_x, v_z) = \frac{1}{2} v_x^2 + \int_0^{x-x_0} \text{sat}(k_x s, -g, g) ds + \frac{1}{2} v_z^2 + \int_0^{z-z_0} \text{sat}(k_z s, -g, g) ds, \quad (5.93)$$

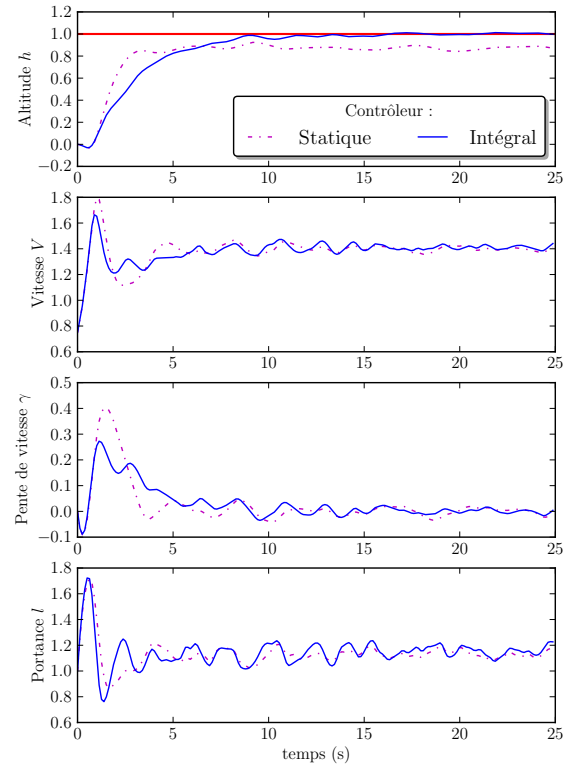


FIGURE 5.2 – Simulation du mode longitudinal d'un avion dans des conditions perturbées (i) sans action intégrale (trait d'axe); (ii) avec l'action intégrale (trait plein).

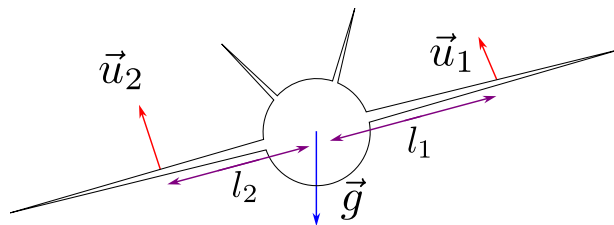


FIGURE 5.3 – Schéma de contrôle d'un PVTOL. On pose $F = u_1 + u_2$ et $T = l_1 u_1 - l_2 u_2$.

dont la dérivée le long des trajectoires est

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, z, v_x, v_z) = & -v_x \left(-\text{sat}(k_x(x - x_0), -g, g) + \frac{F}{m} \sin \theta \right) \\ & - v_z \left(g - \text{sat}(k_x(z - z_0), -g, g) - \frac{F}{m} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (5.94)$$

Cette dérivée est rendue négative par le contrôleur de haut niveau

$$F = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta_c = \text{atan2}(a, b), \quad (5.95a)$$

$$a = k_{v_x} v_x + \text{sat}(x - x_0, -g, g), \quad b = g - k_{v_z} v_z - \text{sat}(z - z_0, -g, g). \quad (5.95b)$$

Ensuite, en faisant une hypothèse de séparation d'échelle de temps, on déduit le contrôleur linéaire

$$T = -k_\omega \omega - k_\theta (\theta - \theta_c) \quad (5.96)$$

qui assure la convergence de $\theta \rightarrow \theta_c$ si k_ω et k_θ sont choisis suffisamment grands.

Définition d'une action intégrale

Puisque la dynamique du système de haut niveau est découplée par les commandes fictives a et b , la définition de la variété M peut être faite séparément sur les deux modes latéral et vertical, avant de procéder à l'étape de *backstepping*. Définissons les intégrateurs

$$\dot{i}_x = k_{i_x} \text{sat}(k_x(x - x_0), g), \quad \dot{i}_z = k_{i_z} \text{sat}(k_z(z - z_0), g), \quad (5.97)$$

Alors, en choisissant

$$M_x = -k_{i_x}(v_x + k_{v_x}(x - x_0)) \quad M_z = -k_{i_z}(v_z + k_{v_z}(z - z_0)), \quad (5.98)$$

le contrôleur de haut niveau avec l'action intégrale devient

$$F = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \theta_c = \text{atan2}(a, b), \quad (5.99a)$$

$$a_i = a + k_{i_x}(i_x + k_{i_x} k_{v_x}(x - x_0) + v_x), \quad b_i = b - k_{i_z}(i_z + k_{i_z} k_{v_z}(z - z_0) + v_z). \quad (5.99b)$$

La loi de commande est alors complétée par (5.96) sous les mêmes hypothèses que dans la section précédente.

Simulation

Les simulations réalisées sont présentées Figure 5.4, où le véhicule est commandé à la position de référence $(x_0, z_0) = (0, 10)$. Les paramètres choisis pour la simulation sont $m = 1,3$; $\epsilon_1 = 0,2$; $\epsilon_2 = 0,74$. Des bruits d'état verticaux et horizontaux sont ajoutés pour exciter le système comme le ferait un environnement perturbé. Les gains sont choisis sans optimisation préalable, aux valeurs

$$k_{i_x} = 0,35, \quad k_{v_x} = 0,7, \quad k_x = 0,7, \quad k_{i_z} = 0,5, \quad k_{v_z} = 1,0, \quad k_z = 1,0. \quad (5.100)$$

Dans le cas du contrôle statique, la dérive entre la consigne et le point de vol stabilisé de m est assez grande. En effet, à l'équilibre, $z - z_0 = g(1 - m)$ dans le cas où $\epsilon_1 = 0$, ce qui fait que la moindre incertitude concernant ce dernier paramètre induit des erreurs conséquentes de positionnement. En revanche, en utilisant le contrôleur intégral proposé, le suivi de la consigne est correctement réalisé.

On voit apparaître un dépassement de consigne sur le mode latéral (le véhicule se déporte transitoirement jusqu'à $x = -15$ m). Celui-ci pourrait être évité en redéfinissant l'intégrateur de sorte que son effet soit plus local, mais implanter un tel intégrateur nécessiterait des hypothèses supplémentaires sur la valeur des perturbations qui affectent le système de façon à définir un « voisinage » d'intérêt dans lequel activer l'intégrateur, ce qui sort du cadre d'un simple exemple.

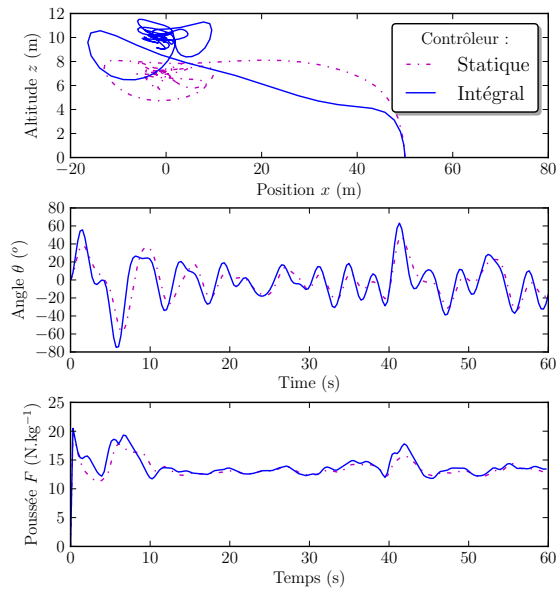


FIGURE 5.4 – Simulation du PVTOL perturbé : (i) sans action intégrale (trait d'axe); (ii) avec l'action intégrale (trait plein).

5.6 Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre la question de la régulation asymptotique robuste. Notre technique suit l'approche très courante en commande linéaire qui consiste à stabiliser l'origine d'un système étendu avec un intégrateur de l'erreur de sortie. Le résultat possède une robustesse démontrée pour toute perturbation de modèle suffisamment petite, au sens C^1 .

Nous utilisons le *forwarding* comme un outil pour concevoir de tels retours d'état. Ceci permet d'avoir une démarche de synthèse itérative, donc d'ajouter un « effet intégral » à un contrôleur déjà existant.

Par ailleurs, aucune structure spécifique de modèle n'est requise pour appliquer notre démarche à un système, sous réserve qu'on dispose déjà d'un contrôleur qui stabilise l'équilibre du système. Ces systèmes peuvent donc être à déphasage non minimal. La principale condition requise est l'inversibilité du gain statique à l'origine, qui est une condition de « non résonance » nécessaire et suffisante en théorie de la régulation.

Les différents exemples présentés illustrent comment utiliser différents degrés de liberté afin de résoudre l'équation (5.48), qui est en pratique la difficulté majeure pour appliquer la technique de *forwarding*. Les résultats obtenus ne laissent pas apparaître de dégradation notable des performances, avec des réponses transitoires à chaque fois comparables entre les différents contrôleurs.

5.7 Perspectives

Trois principaux points attirent notre attention sur la suite à donner à ces développements. Ces études restent cependant à mener.

En premier lieu, étendre l'exemple du mode phugoïde au cas hypersonique. En effet, l'ajout d'intégrateur n'a pas été appliqué à la loi de commande développée au Chapitre 3. Il faudrait réaliser cette extension supplémentaire de la loi de commande. Au regard de la complexité des modèles et de la loi de commande, cela ferait intervenir une des méthodes où M est approché par son linéarisé tangent.

En deuxième lieu, étudier le domaine d'activation de l'effet intégral. En effet, celui-ci n'a pas besoin d'être étendu sur l'ensemble \mathcal{D} pour assurer la régulation asymptotique

robuste. Et intégrer l'erreur de sortie lorsque celle-ci est « loin » de l'origine est au contraire plutôt de nature à « stocker » inutilement une erreur intégrale. L'exemple du PVTOL montre qu'il peut y avoir un intérêt à réduire à zéro les valeurs de $k(x, y)$ pour des grandes valeurs de y , en s'assurant toutefois que (x_e, z_e) , équilibre exponentiellement stable de (5.40) appartient toujours à \mathcal{N} pour toute valeur initiale de $z \in \mathbb{R}^m$.

En troisième lieu, il semble possible d'étendre ce travail au contexte du retour de sortie, en suivant une approche décrite dans Teel et Praly (1994).

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Fonctions de Lyapunov, stabilité et stabilisation

Nous rappelons ici des notions et résultats de base nécessaires à la compréhension des techniques de synthèse de commande mises en œuvres au cours de nos travaux. Le lecteur intéressé trouvera dans Freeman et Kokotović (1996); Khalil (2002); Kokotovic et Arcak (2001); Sontag (1998) de nombreux éléments pour approfondir. Les définitions et résultats proviennent de Praly (2011, 2007).

A.1 Fonctions de comparaison, fonctions définies positives, fonctions propres

Pour introduire la stabilité, nous avons besoin des notions suivantes.

Définition A.1 (Classe \mathcal{K}). Une fonction $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite de classe \mathcal{K} si elle est continue, strictement croissante et nulle en 0.

Elle est dite de classe \mathcal{K}^∞ si elle est non bornée, c'est-à-dire qu'elle satisfait

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha(r) = +\infty. \quad (\text{A.1})$$

Définition A.2 (Classe \mathcal{KL}). Une fonction $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite de classe \mathcal{KL} si, pour chaque réel s positif ou nul, la fonction $r \mapsto \beta(r, s)$ est de classe \mathcal{K} et, pour chaque réel r strictement positif, la fonction $s \mapsto \beta(r, s)$ est strictement décroissante et satisfait

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \beta(r, s) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Par exemple,

- la fonction $s \mapsto \alpha(s) = \arctan(s)$ est de classe \mathcal{K} ;
- la fonction $s \mapsto \alpha(s) = s$ est de classe \mathcal{K}^∞ ;
- la fonction $(s, r) \mapsto \beta(r, s) = r \exp(-s)$ est de classe \mathcal{KL} .

Définition A.3 (Fonction définie positive). Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n contenant l'origine. Une fonction $V : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite définie positive sur E si elle vérifie l'égalité $\{x \in E : V(x) = 0\} = \{0\}$.

Par exemple,

- la fonction $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par $V(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ est définie positive sur \mathbb{R} ;
- la fonction $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par $V(x) = 1 - \cos(x)$ est définie positive sur $] -2\pi ; +2\pi[$.

Définition A.4 (Fonction propre). Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Une fonction $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite propre sur E si, pour chaque paire (v_i, v_s) de réels, l'ensemble $\{x \in E : v_i \leq V(x) \leq v_s\}$ est un sous-ensemble compact, peut-être vide, de E .

A.2 Stabilité

Soient \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Considérons le système autonome

$$\dot{x} = f(x). \quad (\text{A.3})$$

Nous supposons que l'origine est contenu dans l'ouvert \mathcal{O} et que f s'y annule. L'origine est donc une solution constante.

Pour la suite, nous considérons \mathcal{V} un voisinage de l'origine contenu dans \mathcal{O} .

A.2.1 Définitions

Définition A.5 (Stabilité). Supposons que l'origine est une solution de (A.3). Cette solution est dite :

- stable si il existe un réel strictement positif μ et une fonction α de classe \mathcal{K} tels que, pour chaque condition initiale x , dans \mathcal{O} , vérifiant $|x| < \mu$, chaque solution $X(x, t)$ de (A.3) est définie sur $[0 ; +\infty[$ et vérifie

$$|X(x, t)| \leq \alpha(|x|) \quad \forall t \in [0 ; +\infty[; \quad (\text{A.4})$$

- asymptotiquement stable si il existe un réel strictement positif μ et une fonction β de classe \mathcal{KL} tels que, pour chaque condition initiale x , dans \mathcal{O} , vérifiant $|x| < \mu$, chaque solution $X(x, t)$ de (A.3) est définie sur $[0 ; +\infty[$ et vérifie

$$|X(x, t)| \leq \beta(|x|, t) \quad \forall t \in [0 ; +\infty[; \quad (\text{A.5})$$

- exponentiellement stable si il existe trois réels strictement positifs k, γ et μ tels que, pour chaque condition initiale x , dans \mathcal{O} , vérifiant $|x| < \mu$, chaque solution $X(x, t)$ de (A.3) est définie sur $[0 ; +\infty[$ et vérifie

$$|X(x, t)| \leq k|x| \exp(-\gamma t) \quad \forall t \in [0 ; +\infty[; \quad (\text{A.6})$$

- instable si il existe un réel strictement positif ε tel que, pour tout réel strictement positif δ , nous pouvons trouver une condition initiale x , dans \mathcal{O} , vérifiant $|x| < \delta$, une solution $X(x, t)$ et un instant $t^* \geq 0$ tels que $|X(x, t^*)| \geq \varepsilon$.

Dans chacun de ces cas, la propriété est dite globale si \mathcal{O} est l'ensemble \mathbb{R}^n tout entier et nous pouvons prendre $\mu = +\infty$.

A.2.2 Conditions suffisantes

Définition A.6 (Dérivée directionnelle). Étant données des fonctions $\phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, nous appelons $L_f \phi(x)$ dérivée en x de ϕ dans la direction de f ou le long des solutions de $\dot{x} = f(x)$ la limite, si elle existe, $L_f \phi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\phi(x + hf(x, d)) - \phi(x)]$.

Théorème A.1 (Condition suffisante pour la stabilité). Soit $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 et définie positive sur \mathcal{V} . Si nous avons $L_f V(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{V}$, l'origine est une solution stable de (A.3).

Théorème A.2 (Condition suffisante pour la stabilité asymptotique). Soient $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 et définie positive sur \mathcal{V} et $W : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et définie positive sur \mathcal{V} . Si nous avons $L_f V(x) \leq -W(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}$, l'origine est une solution asymptotiquement stable de (A.3).

Théorème A.3 (Principe d'invariance). Soit \mathcal{C} un compact contenu dans \mathcal{O} . Soit $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $W : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue satisfaisant $L_f V(x) \leq -W(x) \leq 0$, pour tout $x \in \mathcal{C}$. Alors, pour chaque solution $X(x, t)$ de (A.3) qui est définie et à valeurs dans \mathcal{C} sur $[0 ; +\infty[$, il existe un réel v_* tel que $X(x, t)$ converge vers le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble

$$N_{v_*} = \{x \in \mathcal{C} : V(x) = v_*, W(x) = 0\}. \quad (\text{A.7})$$

Il est utile pour la suite d'introduire la notion de fonction de Lyapunov.

Définition A.7 (Fonction de Lyapunov). Soit \mathcal{V} un voisinage de l'origine contenu dans \mathbb{R}^n . Une fonction $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite fonction de Lyapunov sur \mathcal{V} si c'est une fonction de classe C^1 , définie positive sur \mathcal{V} . Elle doit de plus être propre lorsque $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$.

A.3 Stabilisation asymptotique par bouclage statique

A.3.1 Définition du problème

Soient \mathcal{O} un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^n (respectivement $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ pour le cas global) et \mathcal{U} un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^m . Soit $f : \mathcal{O} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue vérifiant $f(0,0) = 0$. Nous considérons le système dynamique commandé

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = x, \quad (\text{A.8})$$

où donc nous avons connaissance de l'état x . Le problème de stabilisation asymptotique consiste à rechercher un bouclage $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^1 tel que l'origine du système

$$\dot{x} = f(x, \varphi(x)) \quad (\text{A.9})$$

est asymptotiquement stable.

A.3.2 Fonctions de Lyapunov assignables

D'après le Théorème A.2, si \mathcal{V} est un voisinage de l'origine inclus dans \mathcal{O} , la fonction de Lyapunov recherchée $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ devrait être telle que, pour chaque état x dans \mathcal{V} , nous pouvons trouver une commande u satisfaisant

$$\dot{V}(x) \leq -W(x), \quad \forall x \in \mathcal{V}, \quad (\text{A.10})$$

où $W : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue. Malheureusement, satisfaire l'inégalité (A.10) n'est pas possible pour n'importe quelle fonction de Lyapunov.

Considérons le système affine en la commande $\dot{x} = a(x) + b(x)u$. La dérivée de V , une fonction de Lyapunov de classe C^1 , vérifie le long de ses solutions $\frac{d}{dt}V(x) = L_aV(x) + L_bV(x)u$. Pour chaque x tel que $|L_bV(x)|$ est non nul, cette dérivée $\frac{d}{dt}V(x)$ peut être rendue strictement négative en prenant le bouclage par exemple comme

$$u = -\frac{L_aV(x) + |x|}{|L_bV(x)|^2} L_bV(x)^\top. \quad (\text{A.11})$$

Mais, pour tout x où $|L_bV(x)|$ s'annule, la commande n'a pas d'action sur la dérivée de V puisque nous avons seulement $\frac{d}{dt}V(x) = L_aV(x)$. Il s'en suit qu'une fonction de Lyapunov V ne peut être éligible pour conduire à un bouclage stabilisant asymptotiquement globalement que si elle vérifie la condition

$$L_aV(x) \leq 0, \quad \forall x : |L_bV(x)| = 0. \quad (\text{A.12})$$

On parle alors de fonction de Lyapunov *assignable* au système.

Définition A.8 (Fonction de Lyapunov assignable). La fonction V est dite fonction de Lyapunov :

– assignable point par point au système (A.8) si

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \exists u \in \mathcal{U} : \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq 0; \quad (\text{A.13})$$

– strictement assignable point par point si

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, \quad \exists u \in \mathcal{U} : \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) < 0; \quad (\text{A.14})$$

- strictement assignable continûment à l'origine si, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel δ tel que

$$\forall x \in \mathcal{V} : 0 < \delta < |x|, \quad \exists u \in \mathcal{U} : |u| < \varepsilon : \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq 0. \quad (\text{A.15})$$

A.3.3 Synthèse par annulation, par domination

Lorsque la dérivée d'une fonction de Lyapunov V , assignable au système $\dot{x} = a(x) + b(x)u$ vérifie

$$\widehat{V(x)} = W^-(x) + L_b V(x)(u + p(x)), \quad (\text{A.16})$$

où W^- est un terme non positif et p est un terme quelconque, une synthèse de commande par annulation consiste à prendre une commande de la forme $u = -p(x) - Q(x)L_b V(x)^\top$, où Q est une matrice définie positive.

Définition A.9 (Commande de signe adapté). Un bouclage φ est dit de signe adapté à celui de $L_b V$ si il existe une fonction $Q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ qui est continue sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ et localement borné sur \mathcal{O} et telle que la matrice $Q(x)$ est une matrice symétrique définie positive et nous avons $\varphi(x) = -Q(x)L_b V(x)$.

Une synthèse par domination consiste à prendre une commande de signe adapté, avec un gain suffisamment élevé.

Définition A.10 (C^1 Dissipativité). Considérons un système dynamique défini par $\dot{x} = a(x) + b(x)u$ évoluant dans un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n , avec $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $a(0) = 0$. Ce système est dit C^1 dissipatif s'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie positive, radialement non bornée et C^1 telle que la fonction $W(x) = -L_a V(x)$ est non négative.

Dans le cas d'un système dissipatif, la dérivée d'une fonction de Lyapunov V vérifie

$$\widehat{V(x)} \leq L_b V(x)u. \quad (\text{A.17})$$

Il suffit alors d'avoir une commande de signe adapté pour que l'équilibre soit stable. Celle-ci peut être simplement une commande, dite « gradient », $u = -L_b V(x)^\top$, ou bien elle peut être conçue avec des saturations, etc.

Annexe B

Liste des acronymes

- AIAA** *American Institutes of Aeronautics and Astronautics.*
- BTT** *Bank To Turn.*
- DDL** degré de liberté.
- ODE** équation différentielle ordinaire.
- HSV** véhicule hypersonique.
- I_{sp} impulsion spécifique.
- Léa** acronyme russe pour « véhicule expérimental ».
- NASP** *National Aero-Space Plane.*
- Onera** Office National d'Étude et de Recherche Aérospatiale.
- PD** proportionnel-dérivé.
- PI** proportionnel-intégral.
- PID** proportionnel-intégral-dérivé.
- PVTOL** *Planar Vertical Take-Off and Landing vehicle.*
- Scramjet** *Supersonic Combustion Ramjet.*
- SERN** *Single Expansion Ramp Nozzle.*
- SPHSTC** *Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference.*
- USAF** *US Air Force.*

Annexe C

Nomenclature

α	Angle d'incidence
γ	Pente de vitesse
δ	Angle de gouvernes
$\bar{\varepsilon}$	Efficacité de captation
η	Ratio poussée commandée / poussée disponible
θ	Assiette longitudinale
$\Lambda(V)$	Facteur de portance
μ	Angle de roulis
ρ	Masse volumique de l'air
v	Vitesse
ϕ	Angle de pente
φ_f	Orientation de la poussée (en repère engin)
Φ_i	Richesse du mélange air-carburant
χ	Angle de cap
C_d	Coefficient de trainée (modèle de comportement)
C_l	Coefficient de portance (modèle de comportement)
C_{l_a}	Facteur de portance
C_m	Coefficient de moment de tangage (modèle de comportement)
C_x	Coefficient de trainée (modèle de simulation)
C_y	Coefficient de moment de tangage (modèle de simulation)
C_z	Coefficient de portance (modèle de simulation)
e	Bilan aéro-propulsif
f_s	Rapport stœchiométrique de combustion
F_x	Effort aérodynamique de trainée
F_z	Effort aérodynamique de portance
$g(V)$	Gravitation ressentie le long de la trajectoire
g_0	Gravitation terrestre
h	Altitude
h_0	Consigne en altitude

I_{sp}	Impulsion spécifique
J	Moment d'inertie
m	Masse du véhicule
\mathcal{M}	nombre de Mach
M_y	Moment de tangage
q	Vitesse de tangage
Q_a	Débit massique d'air capté
Q_c	Débit massique de carburant injecté
R_t	Rayon moyen de la terre
$S(V)$	Facteur de similitude
S_ε	Surface de captation
S_{ref}	Surface aérodynamique de référence
T	Poussée
\mathbf{V}	Vecteur vitesse
V	Vitesse
V_0	Consigne en vitesse
$V_{Aéro}$	Vitesse aérodynamique
x	Position longitudinale par rapport au cap
y	Position latérale par rapport au cap

Conclusion et perspectives

Conclusion

Le présent travail s'articule autour de trois parties, qui ont trait à la modélisation, la synthèse de commande et à l'étude de la régulation.

La partie contenant la modélisation est nécessaire pour la synthèse de commande. Elle débouche d'une part sur un modèle de simulation. Celui-ci nous sert comme outil de validation des hypothèses simplificatrices faites à l'occasion de la synthèse. D'autre part elle permet de poser problème de synthèse de commande. Le modèle de commande est un modèle simplifié par rapport au modèle de simulation, mais son comportement est consistant avec celui du modèle de simulation, à l'échelle de la trajectoire étudiée. À l'issue de la modélisation, nous pouvons proposer le modèle (2.48) ainsi que les contraintes imposées à la synthèse : à savoir, obtenir une synthèse robuste aux incertitudes de modélisation, tolérante aux saturations d'actionneurs et n'excitant pas les dynamiques négligées.

Dans la deuxième partie, nous traitons du problème de synthèse de commande. Afin de tenir compte des contraintes présentées, nous faisons le choix d'une synthèse Lyapunov qui tire partie de la dissipativité du mode phugoïde. La dissipativité du mode phugoïde est un fait connu depuis les débuts de l'aéronautique, mais peu de techniques de synthèse tirent parti de cette propriété des véhicules à voilure fixe. Ainsi, nous proposons une loi de guidage de la dynamique longitudinale, ce qui nous permet de déduire une loi de pilotage, par rétropropagation. Nous proposons ensuite d'étendre cette synthèse au guidage simultané des dynamiques longitudinale et latérale, ce qui nous permet de proposer une solution au problème du guidage d'un véhicule hypersonique (HSV) sous les différentes contraintes décrites. Cette loi de guidage est tolérante aux saturations d'actionneurs, robuste aux incertitudes de modélisation, et n'utilise pas de technique « grand gain » afin de permettre la robustesse aux dynamiques négligées. En ce qui concerne le guidage longitudinal, les qualités de la proposition faite ont été évaluées au travers de nombreux cas de simulation. En ce qui concerne le guidage latéral, la proposition faite ne souffre pas d'hypothèses fortes sur la modélisation. Il se trouve par ailleurs que la commande simultanée des deux dynamiques, latérale et longitudinale, se fait aisément au travers du changement de variable proposé.

La troisième partie s'intéresse à la régulation robuste par retour d'état. En effet, il se trouve que les résultats de simulation posent la question de la robustesse de notre loi de commande, en raison de la dispersion des trajectoires du véhicule en boucle fermée. Nous donnons alors un résultat de stabilité montrant la robustesse d'un système commandé pour toute perturbation de modèle suffisamment petite, au sens C^1 . Par ailleurs, nous exploitons ce résultat et montrons comment ajouter un effet intégral à un contrôleur déjà existant. Un des intérêts de cette démarche est qu'il s'agit d'une démarche itérative. De la sorte, un contrôleur existant peut être étendu sans que soit résolu un problème de synthèse radicalement nouveau. Par ailleurs, aucune structure spécifique de modèle n'est requise pour appliquer notre démarche. Les principales conditions requises sont de disposer déjà d'un contrôleur qui stabilise l'équilibre du système, ainsi que l'inversibilité du gain statique à l'origine. Or, cette dernière condition est connue pour être nécessaire et suffisante en théorie de la régulation.

Perspectives

De nombreuses perspectives de développement futurs sont esquissées en conclusion des différents chapitres du mémoire. Nous pouvons cependant mettre l'emphase sur un certain nombre de points qui nous intéressent particulièrement.

Au niveau de la modélisation, nombreuses sont les zones d'ombres à éclaircir. En progressant dans la maîtrise des vols hypersoniques, et au long des campagnes d'essais, la connaissance des nombreux phénomènes évoqués ne peut que se développer et contribuer à préciser les modèles et les contraintes de synthèse. Par ailleurs, poursuivre l'étude du guidage en considérant un modèle de comportement plus proche de la réalité présente un intérêt théorique pour mieux comprendre la dynamique du vol, ainsi qu'un intérêt pratique pour une synthèse de commande plus robuste. Différentes hypothèses simplificatrices pourraient être reconsidérées à cette fin, par exemple : le modèle d'atmosphère hétérogène, le modèle de variation de masse, etc. Nous détaillons différentes propositions relatives à ces aspects en conclusion du Chapitre 3.

Au niveau de la synthèse de commande, on peut noter différentes directions principales dans lesquelles poursuivre ces travaux.

Premièrement, il s'agirait d'employer la loi de guidage proposée afin d'en déduire une loi de pilotage. De nombreuses techniques sont possibles pour y parvenir, toutefois, dans l'hypothèse où le véhicule possède une marge statique garantissant sa dissipativité, il semble qu'une approche de commande hiérarchisée par assignation de fonction de Lyapunov soit recommandée. Un contrôleur hiérarchisé est possible, parce que les HSV vérifient une propriété de séparation d'échelle de temps. Une telle approche permet selon nous une synthèse de pilote relativement simple et peu dépendante de la connaissance des paramètres de modélisation. De plus, cette synthèse pourrait déboucher sur une commande gradient¹, de façon à obtenir un contrôleur à la fois simple et robuste aux incertitudes de modélisation. Par ailleurs, l'exploitation des résultats du Chapitre 5 sur l'ajout d'intégrateur permettrait de réduire les erreurs de poursuites constatées, dues aux erreurs de modélisation.

Deuxièmement, il semble que l'apport principal d'une synthèse de commande non linéaire est d'étendre le bassin d'attraction de la loi de commande, et donc, dans un certain sens, le domaine d'excursion du véhicule contrôlé. Cependant, la complexité d'une synthèse non linéaire peut contraindre la structure de notre contrôleur. En l'occurrence, nous proposons dans nos travaux de simples bouclages statiques. Or, il est possible qu'en régime asymptotique, une synthèse linéaire avec une structure de contrôleur plus riche aurait de meilleures performances, par exemple pour le rejet de perturbation ou l'efficacité énergétique. Nous pourrions donc poser la question, qui concerne l'architecture de contrôle d'un véhicule, s'il n'y aurait pas un intérêt à tenter de concilier les qualités de différentes techniques de commande. Par exemple, une architecture de commande hybride, sélectionnant le contrôleur le plus adapté au régime de vol², pourrait associer des performances élevées en régime asymptotique à un domaine d'attraction étendu.

Troisièmement, toujours au niveau de l'architecture de commande, il faudrait poser le problème de l'observation des mesures, voire d'étudier l'interconnexion de la commande avec le système d'acquisition, de filtrage et de fusion des mesures. En effet, il n'y a pas de raison pour que ces deux systèmes n'interagissent pas entre eux au cours du vol. Toutefois, pour cela, il faudrait définir plus en détail l'équipement embarqué disponible.

Enfin, l'étude de la régulation robuste par retour d'état semble extensible au contexte du retour de sortie, par exemple en suivant une approche décrite dans Teel et Praly (1994). L'intérêt pratique de cette extension est qu'elle permettrait de conclure à l'applicabilité de la démarche sur une plus large classe de contrôleurs utilisés en pratique.

1. Notons que (Astolfi et al., 2008, Chapitre 9.3) constitue un point de départ pour parvenir à un tel résultat. Toutefois, il est probable qu'une reparamétrisation de la modélisation aérodynamique soit nécessaire pour exhiber la dissipativité du véhicule et permettre une synthèse de commande gradient.

2. Utilisant, par exemple, un contrôleur non linéaire en régime transitoire et un contrôleur linéaire en régime asymptotique.

Bibliographie

Andrieu, V. et Piet-Lahanier, H. (2004). Synthesis of flight control and guidance law by output feedback design applied to the interception problem. In *6th ONERA-DLR Aerospace Symposium*. Berlin, Germany.

Andronov, A.A., Vitt, A.A., et Khaikin, S.E. (1987). *Theory of Oscillators*. Dover.

Astolfi, A., Karagiannis, D., et Ortega, R. (2008). *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Communications and Control Engineering. Springer.

Bolender, M.A., Wilkin, H., Jacobsen, L., Drayna, T., et Dwenger, A. (2009). Nonlinear control of a airbreathing hypersonic vehicle. In *16th AIAA/DLR/DGLR International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference*. Bremen, Germany.

Bolender, M.A. et Doman, D.B. (2007). Nonlinear longitudinal dynamical model of an air-breathing hypersonic vehicle. *AIAA Journal of Spacecraft and Rockets*, 44(2), 374–387.

Chakraborty, A. et Arcak, M. (2007). A Two-Time-Scale Redesign for Robust Stabilization and Performance Recovery of Uncertain Nonlinear Systems. *American Control Conference, 2007. ACC '07*, 4643–4648.

Chavez, F.R. et Schmidt, D.K. (1992). An integrated analytical aeropropulsive/aeroelastic model for the dynamic analysis of hypersonic vehicles. In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. Hilton Head Island.

Chavez, F.R. et Schmidt, D.K. (1993). Dynamics of hypersonic flight vehicles exhibiting significant aeroelastic and aeropropulsive interactions. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*. Monterey, CA.

Clark, A., Wu, C., Mirmirani, M., Choi, S., et Kuipers, M. (2006). Developement of an airframe-propulsion integrated generic hypersonic vehicle model. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*. Reno, NV.

Czysz, P.A. et Bruno, C. (2006). *Future Spacecraft Propulsion Systems : Enabling Technologies for Space Exploration*. Springer Praxis Books / Astronautical Engineering Series. Springer.

Ehernberger, L. (1992). Stratospheric turbulence measurements and models for aerospace plane design. Technical report, NASA – Technical Memorandum – 104262.

Falempin, F. et Serre, L. (2009). French flight testing program lea status in 2009. In *16th AIAA/DLR/DGLR International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies*. Bremen, Germany.

Fidan, B., Mirmirani, M., et Ioannou, P.A. (2003). Flight dynamics and control of air-breathing hypersonic vehicles : Review and new directions. In *12th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies*. Norfolk, Virginia.

Fiorentini, L., Serrani, A., Bolender, M.A., et Doman, D.B. (2009). Nonlinear robust adaptive control of flexible air-breathing hypersonic vehicles. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 32(2), 401–416.

- Francis, B. et Wonham, W. (1976). The internal model principle of control theory. *Automatica*, 12(5), 457–465.
- Freeman, R.A. et Kokotović, P.V. (1996). *Robust Nonlinear Control Design*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser.
- George, L., Vernet, J.F.M.H., et Wanner, J.C. (1969). *La Mécanique du vol : performances des avions et des engins*. Dunod.
- Geri, W. et Bertoni, G. (2004). Aircraft guidance law analysis. In *The 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*. St. Petersburg, Russia.
- Hale, J.K. (1980). *Ordinary Differential Equations*. Krieger Publishing Company.
- Harkegard, O. et Torkel Glad, S. (2000). A backstepping design for flight path angle control. *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, 4, 3570–3575.
- Heiser, W.H. et Pratt, D.T. (1994). *Hypersonic airbreathing propulsion*. Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Isidori, A., Marconi, L., et Serrani, A. (2003). *Robust Autonomous Guidance*. Advances in industrial control. Springer.
- Jankovic, M., Sepulchre, R., et Kokotovic, P. (1996). Constructive lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(12), 1723–1735.
- Jiang, Z.P. et Mareels, I. (2001). Robust nonlinear integral control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(8), 1336–1342.
- Johnson, D. (2008). Terrestrial environment (climatic) criteria guidelines for use in aerospace vehicle development. section 2 : Winds. Technical report, NASA – Technical Memorandum – 215633.
- Keshmiri, S., Colgren, R., et Mirmirani, M. (2005). Development of an aerodynamic database for a generic hypersonic air vehicle. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*. San Francisco, CA.
- Khalil, H.K. (2000). Universal integral controllers for minimum-phase nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(3), 490–494.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, third edition edition.
- Kokotovic, P. et Arcak, M. (2001). Constructive nonlinear control : a historical perspective. *Automatica*, 37(5), 637 – 662.
- Kokotovic, P.V., O’Reilly, J., et Khalil, H.K. (1986). *Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA.
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I., et Kokotovic, P. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons.
- Kurzweil, J. (1956). On the inversion of lyapunov’s second theorem on stability of motion. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.*, 24(2), 19–77.
- Lanchester, F.W. (1908). *Aerodnetics : constituting the second volume of a complete work on aerial flight*. Archibald Constable & co. ltd., London. URL <http://www.archive.org/details/aerodneticscon02lancgoog>.
- Lind, R. (2002). Linear parameter-varying modeling and control of structural dynamics with aerothermoelastic effects. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(4), 733–739.

- Mazenc, F. et Praly, L. (1996). Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(11), 1559–1578.
- Menon, P.K. (2001). Comment on “robust nonlinear control of a hypersonic aircraft”. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(1), 143–144.
- Mirmirani, M., Wu, C., Clark, A., Choi, S., et Colgren, R. (2005). Modeling for control of a generic airbreathing hypersonic vehicle. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*. San Francisco, CA.
- Parker, J.T., Serrani, A., Yurkovich, S., Bolender, M.A., et Doman, D.B. (2007). Control-oriented modeling of an air-breathing hypersonic vehicle. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(3), 856–869.
- Piet-Lahanier, H. (2007). Synthèse et analyse de correcteurs de pilotage. Diffusion restreinte RT 2/12474 DPRS, Onera.
- Poulain, F., Piet-Lahanier, H., et Serre, L. (2009). Nonlinear control of a airbreathing hypersonic vehicle. In *16th AIAA/DLR/DGLR International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference*. Bremen, Germany.
- Poulain, F., Piet-Lahanier, H., et Serre, L. (2010). Nonlinear control of a airbreathing vehicle : a backstepping approach. *Automatic control in aerospace*, 3(1).
- Poulain, F. et Praly, L. (2010). Robust asymptotic stabilization of nonlinear systems by state feedback. In 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. Bologna, Italy.
- Praly, L. (2007). Fonctions de lyapunov, stabilité et stabilisation. Communication personnelle.
- Praly, L. (2011). Fonctions de lyapunov, stabilité et stabilisation. Cours professé à l’École Nationale Supérieure des Techniques Avancées.
- Praly, L. et Coron, J.M. (2001). Guidage en rentrée atmosphérique. Technical report, CNES.
- Praly, L. et Jiang, Z.P. (1998). Semiglobal stabilization in the presence of minimum-phase dynamic input uncertainties. In *NOLCOS’98*, volume 2, 325–330.
- Schmidt, D.K. et Velapoldi, J.R. (1999). Flight dynamics and feedback guidance issues for hypersonic airbreathing vehicles. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 859–871.
- Shkolnikov, I.A. et Shtessel, Y.B. (2001). Aircraft nonminimum phase control in dynamic sliding manifold. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(3), 566–572.
- Sigthorsson, D., Jankovsky, P., Serrani, A., Yurkovich, S., Bolender, M.A., et Doman, D.B. (2008). Robust linear output feedback control of an airbreathing hypersonic vehicle. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(4), 1052–1066.
- Sontag, E. (1998). *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite-Dimensional Systems*, volume 6 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition.
- Svirezhev, Y.M. (1966). On the theory of fugoid motions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 30(6), 1311–1316.
- Teel, A. et Praly, L. (1994). Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. *Systems & Control Letters*, 22(5), 313–325.
- Teel, A. (1996). A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(9), 1256–1270.

- Thiele, A. (1999). Élaboration et analyse de lois de guidage-pilotage sous contrainte de ligne de visé pour des missiles équipés d'autodirecteur *strapdown*. Technical report, ONERA.
- Wang, Q. et Stengel, R.F. (2000). Robust nonlinear control of a hypersonic aircraft. *AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics*, 23(4), 413–423.
- Wanner, J.C. (1983). Dynamique du vol et pilotage des avions. Technical report, ONERA — Office National d'études et de recherches aérospatiales.
- Wilcox, Z.D., MacKunis, W., Bhat, S., Lind, R., et Dixon, W.E. (2010). Lyapunov-based exponential tracking control of a hypersonic aircraft with aerothermoelastic effects. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33(4), 1213–1224.
- Xu, H. et Ioannou, P.A. (2004). Adaptive sliding mode control design for a hypersonic flight vehicle. *AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics*, 27(5), 829–838.
- Xu, H., Ioannou, P.A., et Mirmirani, M. (2001). Adaptive and nonlinear control techniques with applications to high performance aircraft. Technical report, Center for Advanced Transportation Technologies.
- Zakrzewski, P. (2007). *Synthèse de correcteur de pilotage d'un véhicule aérobie hypersonique*. Master's thesis, ENSMP.

« Voilà — maintenant *mon* chemin ; — où est le vôtre ? » ;
à ceux qui me demandaient « le chemin » ainsi ai répondu.
Car *le* chemin — cela n'existe pas !

Friedrich Nietzsche, *Ainsi parlait Zarathoustra*,
3^e Partie, De l'esprit de pesanteur.

Commande d'un véhicule hypersonique à propulsion aérobie : modélisation et synthèse

Résumé : La propulsion aérobie à grande vitesse est depuis longtemps identifiée comme l'un des prochains sauts technologiques à franchir dans le domaine des lanceurs spatiaux. Cependant, les véhicules hypersoniques (HSV) fonctionnant dans des domaines de vitesse extrêmement élevées, de nombreuses contraintes et incertitudes entravent les garanties des propriétés des contrôleurs. L'objet de cette thèse est d'étudier la synthèse de commande d'un tel véhicule.

Pour commencer, il s'agit de définir un modèle représentatif d'un HSV exploitable pour la commande. Dans ce travail, nous construisons deux modèles de HSV. Un pour la simulation en boucle fermée, et le second afin de poser précisément le problème de commande.

Nous proposons ensuite une synthèse de commande de la dynamique longitudinale dans le plan vertical de symétrie. Celle-ci est robuste aux incertitudes de modélisation, tolérante à des saturations, et n'excite pas les dynamiques rapides négligées. Ses propriétés sont évaluées sur différents cas de simulation. Puis, une extension est proposée afin de résoudre le problème de commande simultanée des dynamiques longitudinale et latérale, sous les mêmes contraintes.

Ce résultat est obtenu par une assignation de fonction de Lyapunov, suite à une étude des dynamiques longitudinale et latérale. Par ailleurs, pour traiter les erreurs de poursuite dues aux incertitudes de modélisation, nous nous intéressons au problème de régulation asymptotique robuste par retour d'état. Nous montrons que cette régulation peut être accomplie en stabilisant le système augmenté d'un intégrateur de la sortie. Ceci constitue une extension de la structure de contrôle proportionnel-intégral au cas des systèmes non linéaires.

Mots clés : Propulsion aérobie, Véhicules hypersoniques, Commande non linéaire, Modélisation, Commande par assignation de fonction de Lyapunov, *Forwarding*, Action intégrale.

Control of a hypersonic airbreathing vehicle: modeling and synthesis

Abstract: High speed airbreathing thrust has been known for a long time as one of the next technological step to be overcome in space launchers domain. However, HyperSonic Vehicles (HSV) speed operating ranges being extremely high, numerous constraints and uncertainties restrict the ensuring of control properties. The purpose of this thesis is to study the control synthesis for such a vehicle.

First, it concerns the definition of a HSV model for controlling purpose. In this work are constructed two HSV models. One in order to effect closed loop simulation, and the other in order to precisely establish the control problem.

Then, is proposed a control synthesis for the longitudinal dynamics restricted to the symmetric vertical plane. It is robust to modelling uncertainties, allows saturation, and does not excite neglected fast dynamics. Its properties are evaluated on different cases of simulation. Next, an extension is proposed in order to solve the problem of controlling simultaneously longitudinal and lateral dynamics, under the same constraints.

This result is obtained by the use of control Lyapunov functions, following the study of longitudinal and lateral dynamics. Furthermore, in order to solve tracking errors due to modelling uncertainties, the problem of robust asymptotic regulation by state feedback has been addressed. It is shown that such a regulation can be achieved by stabilizing the system augmented by an output integrator. This constitutes an extension for nonlinear systems of the proportional-integral control structure.

Keywords: Airbreathing propulsion, Hypersonic vehicles, Nonlinear control, Modelling, Control-Lyapunov function, Forwarding, Integral action.