

Observation d'un moteur synchrone à aimants permanents pour une commande sans capteur

François Poulain

Juin 2007

Résumé

Il est maintenant démontré que l'observateur de Luenberger tel qu'il a été généralisé au cas non linéaire par Kazantzis et Kravaris résout le problème d'observation sous des hypothèses extrêmement faibles, ce qui en fait une réponse théorique très satisfaisante. En revanche, du point de vue pratique il en est tout autre. Sa mise en oeuvre demande la connaissance d'une solution ou d'une bonne approximation de la solution d'une équation aux dérivées partielles, et dans le cas non homogène cela implique la résolution en ligne d'équations implicites complexes.

Dans ce mémoire nous démontrons la faisabilité de cet observateur pour un modèle de moteur synchrone à aimants permanents. Pour cela nous devons étendre quelque peu la façon de l'appréhender et recourir à un certain nombre d'astuces. Ceci nous permet de donner une réponse positive à la question de la possibilité de mise en oeuvre, mais pour le moment, nous ne prétendons rien de plus. Est-ce un bon observateur ? Quels sont ses réglages "optimaux" ? Comment caractériser sa sensibilité aux approximations de modèle ? Quel est l'influence de ses nombreux degrés de liberté ? Autant de questions que nous nous sommes posés mais qui restent pour le moment ouvertes.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Présentation	6
2.1	L'observateur de Luenberger	6
2.1.1	Construction de l'observateur	6
2.1.2	Inversibilité de $x \mapsto Tx$	7
2.2	L'observateur de KKL	7
2.2.1	Construction de l'observateur	8
2.2.2	Conditions d'existence de l'observateur	8
2.2.3	Conditions d'existence de $(x, t) \mapsto T(x, t)$ injective	10
3	Application au PMSM	11
3.1	Introduction	11
3.2	Observabilité	12
3.2.1	Cas où la vitesse du rotor est non nulle	13
3.2.2	Cas où la vitesse du rotor est nulle	15
3.3	L'observateur	16
3.3.1	Avant propos	16
3.3.2	L'observateur	17
3.4	Expression de T	17
3.4.1	Expression de $T(\chi, t)$	17
3.4.2	Bornitude des coefficients de $T(\chi, t)$	18
3.4.3	Simulation	20
3.5	Inversion de T	21
3.5.1	Méthode de continuation	22
3.5.2	Application à notre observateur	22
3.5.3	Stabilisation de la solution	23
3.6	Simulation	23
4	Réalisation	25
4.1	Introduction	25
4.2	Modèle plus complet du moteur	25
4.3	Adaptation de l'observateur	26
4.4	Expression de $\mathcal{T}(\chi, \psi, t)$	26
4.5	Inversion de $\mathcal{T}(\chi, \psi, t)$	28
4.6	Simulations	28
4.6.1	Simulations dans le cas idéal	29
4.6.2	Simulations avec des mesures bruitées	35

4.6.3	Simulations avec des incertitudes de modélisation	37
4.6.4	Simulation avec passage de x_4 par zéro	42
4.6.5	Simulation dans un contexte défavorable	44
5	Conclusion	46
6	Annexes	49
6.1	Terminologie	49
6.2	Définitions	49

Table des figures

3.1	Convergence de $z_i(t) \rightarrow T_i(\chi(t), t)$	21
3.2	Solution réelles et reconstruites issuent du système 3.1.5	24
4.1	Convergence de $z_i(t) \rightarrow T_i(\chi(t), \psi(t), t)$	29
4.2	Simulation sans bruit, initialisation idéale.	30
4.3	Simulation sans bruit, initialisation erronée.	31
4.4	Simulation sans bruit, initialisation par optimisation.	33
4.5	Simulation avec bruit de variance 0.05.	34
4.6	Reconstruction de x_3 dans un contexte fortement bruité.	35
4.7	Simulation avec bruit de variance 0.2.	36
4.8	Reconstruction de x_3 avec une incertitude sur a_1	37
4.9	Simulation sans bruit, incertitude sur a_1	38
4.10	Simulation sans bruit, incertitude sur a_1 et a_2	39
4.11	Simulation sans bruit, incertitude sur b	40
4.12	Simulation sans bruit, incertitude sur τ	41
4.13	Reconstruction de x_3 avec un passage de x_4 par zéro.	42
4.14	Simulation avec bruit, passage de x_4 par zéro.	43
4.15	Reconstruction de x_3 dans un défavorable.	44
4.16	Simulation dans un contexte défavorable.	45

Chapitre 1

Introduction

Ce document résume 3 mois d'activité passés au Centre Automatiques et Systèmes à étudier et à mettre en oeuvre l'observateur non linéaire de Kazantzis - Kravaris - Luenberger, initié par les chercheurs Kazantzis et Kravaris dans [KK98], et dont Vincent Andrieu et Laurent Praly ont donné des conditions d'existence faibles dans [AP06].

Les observateurs sont des outils pour la reconstruction de l'état des systèmes à partir de l'observation de leur sorties, pour lesquels la pertinence de reconstruction de l'état dépend bien sûr de la pertinence du modèle. La possibilité de réaliser un observateur pour un système donné est étroitement liée à la possibilité d'identifier l'état à partir de l'observation des sorties du système, ce qui se traduit par la propriété structurelle d'observabilité.

Les notions d'observation et d'observabilité ont été introduite par R. E. Kalman à la fin des années 50 dans un contexte probabiliste pour des systèmes linéaires, à des fins liées à la théorie du signal ; voir à ce sujet [Kal60]. C'est néanmoins David Luenberger qui a introduit dans [Lue64] le premier observateur dans un contexte déterministe, avec une application directe pour la commande par retour d'état reconstruit des systèmes dynamiques linéaires.

En ce qui concerne la théorie des observateurs dans le cas non linéaire, la littérature est riche de travaux éparses, mais peu de techniques sont effectivement utilisable en l'état pour une large classe de systèmes. On peut néanmoins citer l'existence de quelques travaux célèbres :

- Le filtre de Kalman étendu, pour lequel la phase de prédiction se calcule en utilisant le modèle non linéaire, alors que la phase de correction utilise le linéarisé tangent autour du point de reconstruction actuel. Cet observateur est simple à mettre en oeuvre, mais ne converge que localement.
- L'observateur de Thau, ainsi que ses évolutions, pour les systèmes de la forme $\dot{x} = Ax + f(x, u(t)), y = Cx$.
- L'observateur dit "grand gain", proposé par J. P. Gauthier, H Hammouri et I. Kupka.

Si on cherche à poser le problème de l'observateur, on se rend compte qu'il peut se séparer en deux problèmes duals : (i) D'une part, il faut assurer la convergence de l'observateur, *i.e.* pour que l'information portée par l'observateur soit utile, la sortie de l'observateur doit converger vers la sortie du processus réel. (ii) D'autre part, il faut résoudre un problème d'inversion, *i.e.* à partir de la connaissance de l'état de l'observateur, on doit déduire l'état du processus correspondant au modèle utilisé.

Cependant, un point commun des observateurs évoqués ci-dessus est le suivant : tous rendent trivial le problème d'inversion en posant $\hat{x} = x$, de façon à ce que la dynamique de l'observateur contienne une copie de la dynamique du processus. Cette technique peut sembler être une extension naturelle du cas linéaire bien connu, mais il se pose le problème de la difficulté d'évaluation du gain de correction nécessaire pour faire converger l'observateur.

L'extension non linéaire de l'observateur de Luenberger proposée par Kazantzis et Kravaris pose le problème différemment : dans ce cas, c'est la dynamique de l'observateur est rendue triviale, de sorte qu'une convergence globale de l'observateur est assurée. En revanche, la difficulté se trouve déplacée vers un problème d'inversion, dans le sens où nous avons l'état z de l'observateur qui converge vers une fonction de l'état du système $T(x)$ définie par une équation aux dérivées partielles. Le problème de la convergence étant réglé, il reste à traiter le problème d'inversion en "temps réel" de la fonction $x \mapsto T(x)$. Cette approche de synthèse d'observateur est plutôt récente mais à déjà motivée quelques travaux, notamment [And05, PMI06, Lon06].

C'est cette problématique qui a motivé mon travail au cours de ce stage, et dont je présente ici les principaux résultats. J'ai directement travaillé sur un problème d'observation proposé par Romeo Ortega, qui concerne un modèle de moteur synchrone pour une commande sans capteur.

Je tiens à remercier Laurent Praly, pour m'avoir accueilli au CAS, et pour m'avoir éclairé de ses lumières tout au long de ce stage, ainsi que Pierre Rouchon pour ses remarques pertinentes. Je remercie également l'ensemble des chercheurs du CAS pour la bonne humeur générale dans laquelle se sont écoulés ces quelques semaines.

Chapitre 2

Présentation de l'observateur de Kazantzis Kravaris Luenberger

2.1 Cas linéaire : l'observateur de Luenberger

Il me semble avant tout intéressant de présenter l'observateur linéaire de Luenberger tel qu'il a été présenté par son auteur dans [Lue64], car généralement on associe directement la notion d'observateur linéaire au fameux observateur de Kalman. L'ensemble des preuves et des résultats présentés dans cette section sont bien sûr disponibles dans la version originale.

On cherche à reconstruire l'état d'un processus modélisé par le système linéaire invariant $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrées, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sorties, avec les matrices A , B et C réelles, de taille appropriées.

Le cas autonome ($u \equiv 0$) représente, grâce à sa simplicité, une première approche pour la reconstruction d'état, mais ce qui en résulte est facilement généralisable. Dans ce cas, il n'est plus nécessaire de reconstruire l'ensemble du vecteur d'état, il suffit simplement de reconstruire une transformation linéaire stationnaire de ce vecteur.

Supposons qu'il soit possible de reconstruire une transformation linéaire T du vecteur d'état x , il est clair qu'il sera alors possible de reconstruire le vecteur d'état, si et seulement si la transformation $x \mapsto Tx$ est inversible. C'est l'approche que l'on suivra dans cette section. On montrera d'abord qu'il est possible et aisé de construire un système qui reconstruit une transformation linéaire du vecteur d'état x , et ensuite on verra comment garantir que la transformation soit inversible.

2.1.1 Construction de l'observateur

Théorème 1 (Observation d'un système autonome). *Soit un système autonome S_1 : $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$, dont la sortie est connectée à un autre système S_2 : $\dot{z} = \Lambda z + \beta y$. Si A et Λ n'ont pas de valeurs propres communes, alors il existe une transformation linéaire stationnaire T telle que si $z(t_0) = Tx(t_0)$, alors $\forall t > t_0, z(t) = Tx(t)$. De façon plus générale :*

$$z(t) = Tx(t) + (z(t_0) - Tx(t_0))e^{\Lambda t}. \quad (2.1.1)$$

Démonstration. Remarquez qu'il n'y a pas besoin que A et Λ soient de même taille, elle ont simplement besoin d'être carrées. Supposons qu'une telle transformation existe, i.e. $\forall t : z(t) = Tx(t)$, on obtient alors la relation :

$$T\dot{x} = TAx \quad (2.1.2)$$

$$T\dot{x} = \Lambda Tx + \beta Cx \quad (2.1.3)$$

$$\text{en substituant } T\dot{x}, \text{ on obtient : } TA - \Lambda T = \beta C. \quad (2.1.4)$$

L'équation (2.1.4) donne une unique solution pour T , si et seulement si A et Λ n'ont pas de valeurs propres communes. De plus, étudions l'erreur de reconstruction :

$$\overbrace{z - Tx}^{\cdot} = \Lambda z - T\dot{x} + \beta Cx \quad (2.1.5)$$

$$= \Lambda(z - Tx), \text{ puisque } T\dot{x} = \Lambda Tx + \beta Cx. \quad (2.1.6)$$

Ceci est une simple équation différentielle linéaire en la variable $z - Tx$, avec la solution bien connue donnée en (2.1.1), ce qui prouve le théorème. De plus, si Λ est une matrice Hurwitz, on a alors $\forall (z_0, x_0) : z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} Tx(t)$. \square

Le résultat précédent ne serait bien sûr de peu d'utilité en pratique s'il ne pouvait pas être étendu aux systèmes non autonomes. Heureusement, cette généralisation est assez directe. Considérons dorénavant le système non autonome décrit dans l'introduction de ce chapitre, $S_1 : \dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, et associons le à l'observateur de Luenberger décrit par $S_2 : \dot{z} = \Lambda z + \beta y + \gamma u$.

Soit T l'unique solution de $TA - \Lambda T = \beta C$. Il vient alors :

$$\overbrace{z - Tx}^{\cdot} = \Lambda z + \beta Cx + \gamma u - TAx - TBu \quad (2.1.7)$$

$$= \Lambda z + \beta Cx + \gamma u - (\Lambda T + \beta C)x - TBu \quad (2.1.8)$$

$$= \Lambda(z - Tx) + (\gamma - TB)u. \quad (2.1.9)$$

En choisissant $\gamma = TB$, on retombe bien sur l'équation différentielle dont la solution est décrite par (2.1.1).

2.1.2 Inversibilité de $x \mapsto Tx$

Il est montré dans [Lue64] (Théorèmes 2 à 4) que dans le cas d'un système linéaire invariant (A, B, C) à n états et p sorties, observable au sens du critère de Kalman, il suffit de réaliser un observateur de dimension $q = n - p$ dont les valeurs propres sont (i) distinctes entre elles, (ii) distinctes de celles de S_1 , et (iii) que la paire (Λ, β) soit commandable, pour garantir l'inversibilité de T . En d'autres termes, la dimension de l'état de l'observateur peut simplement correspondre au nombre de variables d'état du système que l'on doit reconstruire.

2.2 Extension non linéaire : l'observateur de KKL

L'extension non linéaire des observateurs de Luenberger présentée ici fut proposée par les chercheurs N. Kazantzis et C. Kravaris dans [KK98], c'est pour quoi on parle également d'observateur KKL.

2.2.1 Construction de l'observateur

Considérons le système dynamique décrit par :

$$\dot{x} = f(x, t, u(t)), \quad y = h(x). \quad (2.2.1)$$

Avec les fonctions f et h localement Lipschitziennes, dont la dépendance en temps traduit le fait que le système est commandé. On note le vecteur d'état $x(t) \in \mathcal{O}$ un ensemble ouvert inclu dans \mathbb{R}^n . Le vecteur de sortie $y(t) \in \mathbb{R}^p$, et le vecteur d'entrée $u(t) \in \mathbb{R}^m$. On notera $X(x_0, t, t_0)$ le flot, *i.e.* la solution du système à l'instant t issue de (x_0, t_0) . On introduit également $(\sigma_{\mathcal{O}}^-(x_0, t_0), \sigma_{\mathcal{O}}^+(x_0, t_0))$ le plus grand intervalle de temps sur lequel la solution issue de (x_0, t_0) est définie en prenant des valeurs dans \mathcal{O} .

Kazantzis et Kravaris ont proposé l'observateur suivant :

$$\dot{z} = \Lambda z + \beta(h(x)), \quad \hat{x} = T^\sharp(z, t). \quad (2.2.2)$$

Avec les fonctions β et T^\sharp localement Lipschitziennes, l'état de l'observateur z à valeurs dans \mathbb{C}^q , et Λ une matrice Hurwitz à valeurs complexes de taille appropriée. Ce qui nous intéresse dans la suite de cette section, est d'explicitier les conditions nécessaires sur (f, h, Λ, β) pour garantir l'existence d'une fonction $T^\sharp(z, t)$ tel que \hat{x} converge vers x .

2.2.2 Conditions d'existence de l'observateur

Définition 1 (Complétude dans \mathcal{O}). Le système (2.2.1) est complet en temps positif (respectivement négatif) sur \mathcal{O} si nous avons :

$$\sigma_{\mathcal{O}}^+(x_0, t_0) = +\infty \quad \forall (x_0, t_0) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}. \quad (2.2.3)$$

En d'autres mots, la complétude dans \mathcal{O} signifie que chaque solution $X(x_0, t, t_0)$ initiée dans \mathcal{O} existe et reste dans \mathcal{O} pour tout t positif (respectivement négatif).

Théorème 2 (Conditions suffisantes d'existence d'un observateur). *Soit un système dynamique décrit par l'équation (2.2.1), distinguable et complet sur un compact \mathcal{O} . Soit l'observateur décrit par l'équation (2.2.2), avec une matrice $\Lambda \in \mathbb{C}^{q \times q}$ Hurwitz et une fonction $\beta : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{C}^q$ continue. Supposons l'existence d'une fonction $T : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^q$ continue uniformément en (x, t) , et supposons l'existence de ρ , fonction de classe \mathcal{K}_∞ , qui satisfait :*

$$\dot{T}(x, t) = \Lambda T(x, t) + \beta(h(x)) \quad \forall x \in \mathcal{O} \quad (2.2.4a)$$

$$|x_1 - x_2| \leq \rho(|T(x_1, t) - T(x_2, t)|e^{rt}) \quad \forall (x_1, x_2, t) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathbb{R}, \quad (2.2.4b)$$

avec $r < -\max_i \Re\{\lambda_i(\Lambda)\}$.

Alors, sous ces conditions, il existe une fonction $T^\sharp : \mathbb{C}^q \times \mathbb{R} \mapsto \mathcal{O}$ continue uniformément en (z, t) telle que, $\forall x_0 \in \mathcal{O}$ et $\forall z_0 \in \mathbb{C}^q$, l'unique solution décrite par $(X(x_0, t, t_0), Z(z_0, t, t_0, x))$ issue du système

$$\dot{x} = f(x, t, u(t)) \quad \dot{z} = \Lambda z + \beta(h(x)) \quad (2.2.5)$$

est maximale définie à droite sur $[t_0, +\infty[$. De plus, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |T^\sharp(Z(z_0, t, t_0, x)) - X(x_0, t, t_0)| = 0. \quad (2.2.6)$$

Démonstration. La preuve détaillée de ce théorème est dans [AP06] dans le cas stationnaire, et sous des conditions plus faibles. On va se contenter ici d'adapter les résultats pour des systèmes instationnaires complets dans un compact \mathcal{O} , comme on en rencontre le plus souvent en ingénierie.

Du fait de la structure triangulaire du système (2.2.5) et $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall z_0 \in \mathbb{C}^q$, la composante $Z(z_0, t, t_0, x)$ est définie tant que $h(X(x_0, t, t_0))$ est définie. Donc la solution $(X(x_0, t, t_0), Z(z_0, t, t_0, x))$ est maximale définie sur le même intervalle $[t_0, +\infty[$ que la solution $X(x_0, t, t_0)$, puisque \mathcal{O} est un compact complet.

Maintenant, intéressons nous à l'erreur de suivi définie par $z - T(x, t)$. On remarque, de façon similaire à ce qu'on a vu dans le cas linéaire :

$$\overline{z - T(x, t)} = \Lambda z + \beta(h(y(t)) - \dot{T}(x, t)) \quad (2.2.7)$$

$$= \Lambda(z - T(x, t)). \quad (2.2.8)$$

C'est donc une simple équation différentielle linéaire en la variable $z - T(x, t)$. Puisque le système est complet, $\sigma_{\mathcal{O}}^+(x_0) = +\infty$, et puisque Λ est Hurwitz, alors on sait que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |Z(z_0, t, t_0, x) - T(X(x_0, t, t_0), t)| = 0. \quad (2.2.9)$$

Le théorème suivant montre que l'existence d'une fonction $T^\sharp(z, t)$ inverse à gauche de $T(x, t)$ est assurée si $T(x, t)$ est continue et injective en x uniformément en (x, t) , sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R}$, comme requis par (2.2.4b). Une fois l'existence de $T^\sharp(z, t)$ assumée, alors le résultat (2.2.6) découle simplement de (2.2.9). \square

Théorème 3. Soit \mathcal{O} un compact, une fonction $T(x, t) : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^q$ continue uniformément en (x, t) , un réel r et une fonction $\tilde{\rho}$ de classe \mathcal{K}_∞ satisfaisant

$$|x_1 - x_2| \leq \tilde{\rho}(|T(x_1, t) - T(x_2, t)|e^{rt}) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{O}^2, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.2.10)$$

Alors, il existe une fonction $T^\sharp(z, t) : \mathbb{C}^q \times \mathbb{R} \mapsto \mathcal{O}$ continue uniformément en (z, t) , et une fonction ρ de classe \mathcal{K}_∞ telles que

$$|T^\sharp(T(x_1, t), t) - T^\sharp(T(x_2, t), t)| \leq \rho(|T(x_1, t) - T(x_2, t)|e^{rt}) \quad (2.2.11)$$

D'où, en posant $z = T(x, t)$,

$$|\hat{x} - T^\sharp(z, t)| \leq \rho(|T(\hat{x}, t) - z|e^{rt}) \quad (2.2.12)$$

Démonstration. Puisque $\tilde{\rho}$ est une fonction de classe \mathcal{K}_∞ , on peut forcément trouver une fonction ρ de classe \mathcal{K}_∞ qui vérifie

$$|x_1 - x_2| \leq \rho(|T(x_1, t) - T(x_2, t)|) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{O}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.2.13)$$

mais dont la dérivée n'est pas croissante sur \mathbb{R}_{+*} . Cela implique, pour $0 \leq b < a$:

$$\frac{\rho(a) - \rho(b)}{a - b} \leq \frac{\rho(a - b)}{a - b}, \quad (2.2.14)$$

$$\text{d'où, } \rho(|x_3 - x_1|) \leq \rho(|x_3 - x_2|) + \rho(|x_1 - x_2|) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}^3. \quad (2.2.15)$$

À partir de maintenant, pour chaque composante $l \in \{1, \dots, n\}$, soit la fonction $T_l^\sharp(z, t) : \mathbb{C}^q \times \mathbb{R} \mapsto \mathcal{O}$ définie par

$$T_l^\sharp(z, t) = \inf_{x \in \mathcal{O}} x_l + \rho(|T(x, t) - z|e^{rt}). \quad (2.2.16)$$

Puisque \mathcal{O} est compact, il existe $x_z \in \mathcal{O}$ satisfaisant

$$T_l^\sharp(z, t) = x_{z_l} + \rho(|T(x_z, t) - z|e^{rt}). \quad (2.2.17)$$

De plus, pour $z = T(x, t)$, on peut choisir $x_z = x_1$, d'où, d'après (2.2.13) :

$$x_{1_l} \leq x_{z_l} + \rho(|T(x_z, t) - T(x_1, t)|e^{rt}), \quad (2.2.18)$$

$$\text{ce qui revient à } T_l^\sharp(T(x, t), t) = x_l, \quad \forall x \in \mathcal{O}. \quad (2.2.19)$$

Enfin, d'après (2.2.15), pour chaque paire (z_1, z_2) satisfaisant $T_l^\sharp(z_1, t) \geq T_l^\sharp(z_2, t)$,

$$T_l^\sharp(z_1, t) \leq x_{z_{2l}} + \rho(|T(x_{z_2}, t) - z_1|e^{rt}), \quad (2.2.20)$$

$$T_l^\sharp(z_2, t) = x_{z_{2l}} + \rho(|T(x_{z_2}, t) - z_2|e^{rt}), \quad (2.2.21)$$

$$T_l^\sharp(z_1, t) - T_l^\sharp(z_2, t) \leq \rho(|T(x_{z_2}, t) - z_1|e^{rt}) - \rho(|T(x_{z_2}, t) - z_2|e^{rt}), \quad (2.2.22)$$

$$\leq \rho(|z_1 - z_2|e^{rt}). \quad (2.2.23)$$

On peut donc conclure que T_l^\sharp est une fonction continue satisfaisant les équations (2.2.19) et (2.2.23). \square

2.2.3 Conditions d'existence de $(x, t) \mapsto T(x, t)$ injective

Jusqu'à maintenant, on a supposé l'existence d'une fonction $T(x, t)$ injective en x uniformément en (x, t) sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R}$. Il a été donné dans [AP06] des conditions pour garantir l'existence de $T(x, t)$ solution de (2.2.4a). Notamment, si \mathcal{O} est inclus dans un compact complet en temps négatif, alors l'expression suivante pour T a un sens, et est solution de l'équation (2.2.4a) :

$$T(x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} e^{\Lambda(t_0-s)} \beta(h(X(x_0, s, t_0))) ds. \quad (2.2.24)$$

Si de plus le système est distinguable et que $\beta(h(X(x_0, t, t_0)))$ est bornée pour tout $t \in]-\infty, t_0]$, et pour tout $x_0 \in \mathcal{O}$, alors si q la dimension de z est suffisamment grande, la fonction $(x, t) \mapsto T(x, t)$ est injective et il existe $r < -\max_i \Re\{\lambda_i(\Lambda)\}$ tel que

$$\exists \rho : |x_1 - x_2| \leq \rho(|T(x_1, t) - T(x_2, t)|e^{rt}). \quad (2.2.25)$$

Chapitre 3

Application au moteur synchrone à aimants permanents

3.1 Introduction

Depuis les années 90, les moteurs synchrones à aimants permanents (*Permanent Magnet Synchronous Motors*) sont couramment utilisés dans les applications à fortes performances. L'absence d'excitation du rotor leur confère notamment une fiabilité et une efficacité supérieure aux autres technologies.

En ce qui concerne la commande de ces moteurs, c'est un problème non linéaire qui a motivé beaucoup de travaux, dans lesquels ont été introduit des changements de coordonnées tels le repère dq de Blondel-Park. Plus récemment, il a été introduit des modèles évolués qui permettent, grâce au couplage fort des équations du modèle, la mise en oeuvre de contrôleurs sans capteurs sur le rotor. Ceci permet des avantages certains, nourris d'espoirs en terme de coûts, de fiabilité et d'intégration de ces moteurs.

Dans l'article [PS01], équations (12-17), il est présenté un modèle pour la commande sans capteur, ainsi qu'un contrôleur de vitesse sans capteur (Section 4.3). Les seules mesures provenant du processus physique sont les courants d'inducteurs, pour lesquels il est aisé d'avoir une mesure précise et peu bruitée. Le modèle s'exprime sous cette forme :

$$L\dot{i}_{d_e} = -R_s i_{d_e} + \hat{\omega} L i_{q_e} - \Phi_{d0} \omega \sin \tilde{\theta} + v_{d_e} \quad (3.1.1a)$$

$$L\dot{i}_{q_e} = -R_s i_{q_e} - \hat{\omega} L i_{d_e} - \Phi_{q0} \omega \cos \tilde{\theta} + v_{q_e} \quad (3.1.1b)$$

$$J\dot{\omega} = P\Phi_{q0}(i_{d_e} \sin \tilde{\theta} + i_{q_e} \cos \tilde{\theta}) - B\omega - \tau_l \quad (3.1.1c)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \hat{\omega} - \omega \quad (3.1.1d)$$

En notant $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ l'erreur d'estimée de position, ω et $\hat{\omega}$ la vitesse du rotor et l'estimée de la vitesse, v_{d_e} , v_{q_e} , i_{d_e} , et i_{q_e} les tensions et courants dans le repère dq , Φ_{q0} et Φ_{d0} les valeurs du flux des aimants permanents. P est le nombre de paires de pôles, et τ_l est le couple de charge appliqué au moteur.

Suite à une suggestion de M. Ortega, on s'est posé la question de savoir s'il était possible de reconstruire l'état du moteur à partir de l'observation de ses courants, et

tout particulièrement de la variable $\tilde{\theta}$ qui quantifie l'erreur d'estimée de la position du rotor. Pour aborder le problème sans traîner des notations trop lourdes, on a travaillé sur une version simplifiée de ce modèle qui contracte les paramètres connus. Ainsi, en identifiant :

$$x_1 = i_{d_e} \quad u_1 = \frac{1}{L} (v_{d_e} - R_s i_{d_e} + \hat{\omega} L i_{q_e}) \quad (3.1.2)$$

$$x_2 = i_{q_e} \quad u_2 = \frac{1}{L} (v_{q_e} - R_s i_{q_e} - \hat{\omega} L i_{d_e}) \quad (3.1.3)$$

$$x_3 = \tilde{\theta} \quad x_4 = \omega. \quad (3.1.4)$$

On se ramène au modèle suivant :

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_4 \sin x_3 + u_1(t) \quad (3.1.5a)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_4 \cos x_3 + u_2(t) \quad (3.1.5b)$$

$$\dot{x}_3 = -x_4 + u_3(t) \quad (3.1.5c)$$

$$\dot{x}_4 = b(x_1 \sin x_3 + x_2 \cos x_3) - \tau(t). \quad (3.1.5d)$$

Avec les paramètres $a_1, a_2, b > 0$ supposés connus, et la fonction $t \mapsto \tau(t)$ supposée constante mais de valeur inconnue, qui regroupe l'ensemble des accélérations angulaires de perturbation qui s'appliquent au rotor.

3.2 Observabilité du moteur

On a vu que la mise en oeuvre de l'observateur KKL requiert la distinguabilité du système, on va s'intéresser dans cette section à caractériser l'observabilité du système, qui implique sa distinguabilité.

D'une façon approchée, on peut considérer qu'un observateur est un système qui nous assure au minimum que sa sortie \hat{y} converge vers la sortie mesurée y . Donc une information pertinente qu'un observateur fonctionnel peut nous fournir est $(\hat{y}, \dot{\hat{y}}, \ddot{\hat{y}}, \dots) \approx (y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots)$. Il s'en suit qu'un observateur fonctionne correctement si, à partir de la connaissance de $(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(r)})$ et des entrées du système sur un intervalle de temps donné $[t_0, t]$, on peut reconstruire l'état initial $x_0(t_0)$ du système. On peut donc formuler le problème de la façon suivante.

Définition 2. Un système $\dot{x} = f(x, t, u(t))$ avec une équation de sortie $y = h(x)$ est dit différentiellement observable d'ordre r si la fonction définie ci-après est injective.

$$S\Phi_r^{f,h} : (x_0, u, \dot{u}, \dots, u^{(r-1)}) \mapsto (y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(r-1)}) \quad (3.2.1)$$

C'est une approche développée en détail par J. P. Gauthier et I. Kupka dans [GK01], et qui rejoint au niveau du principe l'approche proposée de l'observabilité algébrique.

En ce qui nous concerne, on va montrer qu'il est possible d'identifier formellement le vecteur d'état à partir de la connaissance de $(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(r-1)})$, ce qui implique l'observabilité différentielle. On vas considérer 2 cas pour lesquels l'approche est différente : le cas où x_4 est identiquement nulle, *i.e.* $x_4 \equiv 0$, et le cas où x_4 n'est pas identiquement nulle, *i.e.* $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{d^n x_4}{dt^n} \neq 0$.

3.2.1 Cas où la vitesse du rotor est non nulle : $x_4 \neq 0$

Proposition 1 (Observabilité du moteur). *Le moteur décrit par le système (3.1.5) est différentiellement observable d'ordre 3 par les sorties x_1 et x_2 en tout point de l'espace d'état \mathcal{O} si $x_4 \neq 0$, et sous des conditions à préciser.*

En d'autres mots, la vitesse du rotor peut s'annuler, mais seulement en des instants qui forment un ensemble de mesure nulle. Ainsi, $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{d^n x_4}{dt^n} \neq 0$.

Démonstration. Les variables d'état x_1, x_2 représentent respectivement les courants i_{d_e} , et i_{q_e} dans le repère de coordonnées dq . x_4 , et x_3 représentent respectivement la vitesse ω du rotor et l'erreur d'estimation $\tilde{\theta}$ de la position du rotor. Cette erreur résulte de l'équation (3.1.5c), où u_3 est une estimation de la vitesse du moteur.

Pour plus de simplicité, on pose $a_1 = a_2 = a$ dans cette section.

Les paramètres a, b , étant connus, et x_1, x_2 étant mesurés, on souhaite qualifier l'observabilité du modèle pour reconstruire x_3 , l'erreur d'estimation de position, sachant que x_4 et τ sont inconnus. En considérant connus $\dot{x}_1, \dot{x}_2, u_1$, et u_2 , on remarque que l'on peut facilement accéder aux termes $ax_4 \sin x_3$ et $ax_4 \cos x_3$. Considérons alors les observations fictives suivantes :

$$y_{f_1} = ax_4 \sin x_3 = u_1 - \dot{x}_1, \quad y_{f_2} = ax_4 \cos x_3 = u_2 - \dot{x}_2. \quad (3.2.2)$$

On peut dès maintenant remarquer les expressions suivantes, qui vont constituer les fondements de notre approche :

$$\overbrace{\dot{\cos x_3}} = -\dot{x}_3 \sin x_3 = (x_4 - u_3) \sin x_3 = \frac{y_{f_1}}{a} - u_3 \sin x_3, \quad (3.2.3a)$$

$$\overbrace{\dot{\sin x_3}} = \dot{x}_3 \cos x_3 = (u_3 - x_4) \cos x_3 = u_3 \cos x_3 - \frac{y_{f_2}}{a}, \quad (3.2.3b)$$

$$y_{f_1} \cos x_3 - y_{f_2} \sin x_3 = 0, \quad (3.2.4)$$

$$y_{f_1} \sin x_3 + y_{f_2} \cos x_3 = ax_4, \quad (3.2.5)$$

$$y_{f_1}^2 + y_{f_2}^2 = a^2 x_4^2. \quad (3.2.6)$$

Étude de $y_{f_1} \cos x_3 - y_{f_2} \sin x_3$

Premièrement, en dérivant l'équation (3.2.4) par rapport au temps, on obtient l'équation suivante :

$$(\dot{y}_{f_1} - u_3 y_{f_2}) \cos x_3 - (\dot{y}_{f_2} + u_3 y_{f_1}) \sin x_3 = -\frac{1}{a}(y_{f_1}^2 + y_{f_2}^2). \quad (3.2.7)$$

Cette équation peut être réécrite avec des termes plus génériques, soient

$$\alpha = (\dot{y}_{f_1} - u_3 y_{f_2}), \quad \beta = (-\dot{y}_{f_2} - u_3 y_{f_1}), \quad \gamma = -\frac{1}{a}(y_{f_1}^2 + y_{f_2}^2), \quad (3.2.8)$$

on obtient alors l'équation $\alpha \cos x_3 + \beta \sin x_3 = \gamma$. On peut voir cette équation comme l'expression d'un produit scalaire γ entre deux vecteurs : (α, β) et $(\cos x_3, \sin x_3)$. Afin de ne pas compliquer les calculs, et sous réserve que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, on va travailler sur des valeurs normalisées de ces paramètres. Soient

$$\alpha_n = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \beta_n = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \gamma_n = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (3.2.9)$$

On obtient donc les équations

$$\alpha_n \cos x_3 + \beta_n \sin x_3 = \gamma_n, \quad \alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1, \quad (3.2.10)$$

dont les solutions sont de la forme

$$\sin x_3 = \alpha_n \gamma_n \pm k \beta_n, \quad \cos x_3 = \beta_n \gamma_n \mp k \alpha_n. \quad (3.2.11)$$

Or, $\sin^2 x_3 + \cos^2 x_3 = 1$, d'où

$$(\alpha_n \gamma_n)^2 + (\beta_n \gamma_n)^2 + (k \alpha_n)^2 + (k \beta_n)^2 = 1 \quad (3.2.12)$$

$$k^2(\alpha_n^2 + \beta_n^2) = 1 - \gamma_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \quad (3.2.13)$$

$$k^2 = 1 - \gamma_n. \quad (3.2.14)$$

Ceci mène finalement à deux couples de solution possibles $(\cos x_3, \sin x_3)$ sous réserve que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

$$\sin x_3 = \alpha_n \gamma_n \pm \beta_n \sqrt{1 - \gamma_n} \quad (3.2.15a)$$

$$\cos x_3 = \beta_n \gamma_n \mp \alpha_n \sqrt{1 - \gamma_n} \quad (3.2.15b)$$

Remarque 1. Dans le cas singulier où α et β s'annulent ponctuellement, on retrouve un résultat similaire pour $\sin x_3$ et $\cos x_3$ en re-dérivant l'équation (3.2.7), ce qui donne $\dot{\alpha} \cos x_3 + \dot{\beta} \sin x_3 = \dot{\gamma}$.

Remarque 2. Les résultats précédant sont donnés sous réserve que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, or on peut remarquer que $x_4 \equiv 0$ implique directement $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Les autres cas de figure possible qui peuvent annuler simultanément α et β sont compliqués, et un simple stage n'offre pas le temps de faire le tour de ce problème.

Étude de $y_{f_1} \sin x_3 + y_{f_2} \cos x_3$

Dans un second temps, en dérivant l'équation (3.2.5) par rapport au temps, on obtient l'équation suivante :

$$a\tau = (abx_1 - \alpha) \sin x_3 + (abx_2 + \beta) \cos x_3. \quad (3.2.16)$$

En utilisant les couples solutions $(\sin x_3, \cos x_3)$ issus de (3.2.15), et en évaluant τ pour chaque couple, on dispose désormais de deux triplés de solution $(\sin x_3, \cos x_3, \tau)$ possibles.

Étude de $y_{f_1}^2 + y_{f_2}^2$

En dérivant l'équation (3.2.6), on obtient l'équation suivante :

$$a^2 x_4 \tau = a^2 x_4 b(x_1 \sin x_3 + x_2 \cos x_3) - y_{f_1} \dot{y}_{f_1} - y_{f_2} \dot{y}_{f_2} \quad (3.2.17)$$

$$a^2 x_4 \tau = ab(x_1 y_{f_1} + x_2 y_{f_2}) - y_{f_1} \dot{y}_{f_1} - y_{f_2} \dot{y}_{f_2}. \quad (3.2.18)$$

D'une part, x_4 est connu au signe près : $a^2 x_4^2 = y_{f_1}^2 + y_{f_2}^2$. D'autre part, puisque x_4 n'est pas identiquement nul, on peut identifier deux triplés $(\tau, \sin x_3, \cos x_3)$ en utilisant les résultats (3.2.15) et (3.2.16). À partir de là, puisque la connaissance de x_4^2 et (3.2.18) nous donne un couple de deux solutions opposées en signe pour τ , alors on

pourra identifier un unique triplé solution si les deux τ donnés par (3.2.16) ne sont pas centrés autour de 0. Ceci nécessite donc :

$$\begin{aligned} & (abx_1 - \alpha)(\alpha_n \gamma_n + \beta_n \sqrt{1 - \gamma_n}) + (abx_2 + \beta)(\beta_n \gamma_n - \alpha_n \sqrt{1 - \gamma_n}) \\ & \neq -(abx_1 - \alpha)(\alpha_n \gamma_n - \beta_n \sqrt{1 - \gamma_n}) - (abx_2 + \beta)(\beta_n \gamma_n + \alpha_n \sqrt{1 - \gamma_n}), \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

et qui se réduit à :

$$(abx_1 - \alpha)\alpha + (abx_2 + \beta)\beta \neq 0. \quad (3.2.20)$$

Cette fois encore, un simple stage ne me fourni pas le temps d'investigation nécessaire pour dégager un sens physique à cette condition.

Remarque 3. Dans le cas où x_4 est ponctuellement nul, on peut également retrouver un résultat similaire à (3.2.18) en utilisant les dérivés de y_{f_1} et y_{f_2} . En effet, si $x_4 = 0$, $\dot{y}_{f_1} = a\dot{x}_4 \sin x_3$ et $\dot{y}_{f_2} = a\dot{x}_4 \cos x_3$, d'où $\dot{y}_{f_1}^2 + \dot{y}_{f_2}^2 = a^2 \dot{x}_4^2$.

Pour résumer notre démarche, si :

1. $x_4 \neq 0$,
2. $\dot{y}_{f_1} \neq u_3 y_{f_2}$ ou $\dot{y}_{f_2} \neq -u_3 y_{f_1}$,
3. $(abx_1 - \alpha)\alpha + (abx_2 + \beta)\beta \neq 0$, avec α et β définis en (3.2.8),

alors (3.2.15) et (3.2.16) donnent deux couples de solutions $(\sin x_3, \cos x_3, \tau)$, et l'équation (3.2.18) donne τ au signe près. Il reste à identifier le triplet $(\sin x_3, \cos x_3, \tau)$ solution du système dynamique.

Enfin l'équation (3.2.5) nous permet d'identifier x_4 , et puisque l'on connaît les données $(\tau, \sin x_3, \cos x_3, x_4)$, on a identifié l'ensemble de l'état du système d'ordre réduit, sachant que le reste de l'état du système complet est mesuré au travers de y_1 et y_2 . Par ailleurs, dans le cas favorable, il suffit de dériver deux fois les sorties y_1 et y_2 du processus pour permettre l'identification de l'état. Ceci nous permet donc de conclure que le modèle (3.1.5) est différentiellement observable d'ordre 3 dans le cas où la vitesse du rotor x_4 n'est pas identiquement nulle. \square

3.2.2 Cas où la vitesse du rotor est nulle : $x_4 \equiv 0$

Dans le cas où $x_4 \equiv 0$, cela correspond à un cas de d'arrêt du rotor ($\omega \equiv 0$). On peut alors réécrire le modèle du moteur :

$$\dot{x}_1 = u_1 \quad (3.2.21a)$$

$$\dot{x}_2 = u_2 \quad (3.2.21b)$$

$$\dot{x}_3 = u_3 \quad (3.2.21c)$$

$$0 = b(x_1 \sin x_3 + x_2 \cos x_3) - \tau. \quad (3.2.21d)$$

En dérivant par rapport au temps l'équation (3.2.21d), on obtient :

$$(\dot{x}_1 - u_3 x_2) \sin x_3 + (\dot{x}_2 + u_3 x_1) \cos x_3 = \dot{\tau}. \quad (3.2.22)$$

Étant donné que l'on se trouve dans une situation singulière d'équilibre, on peut justement penser que τ est constant dans ce cas, et considérer $\dot{\tau} \equiv 0$. De façon plus générale, on peut considérer qu'il existe un ordre n pour lequel $\forall k \in \mathbb{N}, k > n : \frac{d^k \tau}{dt^k} = 0$.

Alors, en dérivant suffisamment l'équation (3.2.21d), et en utilisant les techniques utilisées précédemment, on peut se ramener à une équation du type

$$\mu \sin x_3 + \nu \cos x_3 = 0, \quad (3.2.23)$$

avec $\mu^2 + \nu^2 = 1$, et dont les solutions sont données par $\sin x_3 = \pm \nu$ et $\cos x_3 = \mp \mu$. Ceci associé à (3.2.21d) nous donne deux couples solutions pour $(\tau, \sin x_3, \cos x_3)$. Par continuité des solutions du système, on peut penser à identifier la solution par rapport à la dernière identification valide, mais si l'observation est initialisée avec le moteur à l'arrêt, on ne peut pas reconstruire l'état du système.

3.3 Présentation de l'observateur

3.3.1 Avant propos

Dans cette section, on va voir comment définir un observateur pour le modèle (3.1.5) étudié dans la section précédente. À partir de maintenant, on doit également travailler avec un couple τ inconnu. Pour faire cela, on utilise la technique bien connue d'augmentation du vecteur d'état. Cela ne pose pas de problème particulier, puisque l'on a supposé τ inconnu pendant la phase d'étude de l'observabilité.

Dans cette section, on poursuivra avec l'idée de considérer les sorties fictives y_{f_1} et y_{f_2} introduites dans la section précédente. Cette considération n'est pas sans conséquences, et l'observateur que l'on détaille dans cette section est inutilisable en pratique. Son intérêt réside dans sa relative simplicité et il introduit la méthode de synthèse que l'on utilisera dans le chapitre 4, qui donne les détails d'un observateur implantable.

Notre modèle de moteur est :

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_4 \sin x_3 + u_1 \quad (3.3.1a)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_4 \cos x_3 + u_2 \quad (3.3.1b)$$

$$\dot{\widehat{\cos x_3}} = -(u_3 - x_4) \sin x_3 \quad (3.3.1c)$$

$$\dot{\widehat{\sin x_3}} = (u_3 - x_4) \cos x_3 \quad (3.3.1d)$$

$$\dot{x}_4 = b x_2 \cos x_3 + b x_1 \sin x_3 - \tau \quad (3.3.1e)$$

$$\dot{\tau} = 0 \quad (3.3.1f)$$

Puisque les variables x_1 , u_1 , x_2 , et u_2 sont connues, nous supposons donc, pour le moment, que les sorties fictives

$$y_{f_1} = u_1 - \dot{x}_1 \quad y_{f_2} = u_2 - \dot{x}_2 \quad (3.3.2)$$

sont connues. Ceci nous permet de travailler sur un modèle d'ordre réduit avec injection des sorties dans la dynamique du modèle. Ainsi notre modèle de synthèse est à dynamique linéaire instationnaire, et sa sortie est quadratique en fonction de l'état :

$$\overline{\begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ x_4 \\ \tau \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ bx_2 & bx_1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ x_4 \\ \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \end{pmatrix} \quad (3.3.3a)$$

$$y_{f1} = \frac{a_1}{2} (\cos x_3 \quad \sin x_3 \quad x_4 \quad \tau) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ x_4 \\ \tau \end{pmatrix} \quad (3.3.3b)$$

$$y_{f2} = \frac{a_2}{2} (\cos x_3 \quad \sin x_3 \quad x_4 \quad \tau) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ x_4 \\ \tau \end{pmatrix} \quad (3.3.3c)$$

Ou bien encore, tout simplement :

$$\dot{\chi} = A(t)\chi + By_f(t), \quad (3.3.4a)$$

$$y_f = \chi^T C \chi. \quad (3.3.4b)$$

Remarque 4. Pour conserver des notations raisonnablement compacte, C est choisi comme un tenseur d'ordre 3, de taille appropriée pour avoir $\chi^T C \chi \in \mathbb{R}^p$.

Remarque 5. Pour ce modèle, l'observabilité établie au paragraphe précédent est toujours valide tout simplement du fait que le vecteur y_f s'exprime comme dérivées de grandeur connues et que ce système ne fait pas intervenir ces grandeurs elles-mêmes mais seulement y_f .

3.3.2 L'observateur

On propose donc l'utilisation d'un observateur KKL décrit par $\dot{z} = \Lambda z + \beta y_f$:

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ z_j \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_i & & & \\ & & & \lambda_j & & \\ & & & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & & \lambda_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ z_j \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

L'état de cet observateur est à valeurs complexes : $z \in \mathbb{C}^q$ et sa dimension q n'est pas définie. Elle doit seulement être suffisamment grande pour garantir l'inversibilité de la fonction $z = T(\hat{\chi}, t)$, mais la complexité de l'observateur augmente avec q .

3.4 Existence et expression de $T(\chi, t)$

3.4.1 Expression de $T(\chi, t)$

Nous avons rappelé dans le chapitre 2.2 que, sous des conditions peu contraignantes, satisfaites dans le cas du modèle d'ordre réduit du moteur, il existe une fonc-

tion $(\chi, t) \mapsto T(\chi, t)$ solution du système suivant :

$$\dot{T}(\chi, t) = \Lambda T(\chi, t) + \beta y_f \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \chi} \dot{\chi} + \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda T(\chi, t) + \beta y_f \quad (3.4.2)$$

et telle que $Z(z_0, t, t_0, y_f) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T(\chi(\chi_0, t, t_0), t)$.

Vu la structure à dynamique linéaire de (3.3.4), les solutions sont donnés par

$$\chi(\chi_0, t, t_0) = \phi(t, t_0)\chi_0 + F(t, t_0) \quad (3.4.3)$$

$$\text{d'où } y_f = \chi_0^T Y_Q(t, t_0)\chi_0 + \chi_0^T Y_L(t, t_0) + Y_0(t, t_0) \quad (3.4.4)$$

et il existe donc d'après (2.2.24) une solution à (3.4.2) que l'on prendra quadratique par rapport à l'état χ . Nous prenons donc, pour chaque $i \in \{1, \dots, q\}$:

$$T_i(\chi, t) = \chi^T T_{Q_i}(t)\chi + \chi^T T_{L_i}(t) + T_{C_i}(t). \quad (3.4.5)$$

Dans ce contexte, il faut identifier T_{Q_i} , T_{L_i} et T_{C_i} , tels que nous ayons :

$$\frac{\partial T_i}{\partial \chi} \dot{\chi} + \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i T_i(\chi, t) + \beta_i y_f, \quad (3.4.6)$$

$$\text{avec } \frac{\partial T_i}{\partial \chi} = \chi^T (T_{Q_i} + T_{Q_i}^T) + T_{L_i}^T, \quad (3.4.7)$$

$$\text{et } \frac{\partial T_i}{\partial t} = \chi^T \dot{T}_{Q_i} \chi + \chi^T \dot{T}_{L_i} + \dot{T}_{C_i}. \quad (3.4.8)$$

En développant ces équations, et en identifiant les termes quadratiques et linéaires en χ , on obtient les équations différentielles suivantes que doivent satisfaire ces fonctions, et qui complètent l'implantation de l'observateur :

$$\dot{T}_{Q_i} = \lambda_i T_{Q_i} - T_{Q_i} A - A^T T_{Q_i} + \beta_i C \quad (3.4.9a)$$

$$\dot{T}_{L_i} = \lambda_i T_{L_i} - A^T T_{L_i} - (T_{Q_i} + T_{Q_i}^T) B y_f \quad (3.4.9b)$$

$$\dot{T}_{C_i} = \lambda_i T_{C_i} - T_{L_i}^T B y_f. \quad (3.4.9c)$$

Remarque 6. Puisque $\beta_i C$ est une matrice symétrique, si T_{Q_i} est initialisée symétrique, elle conservera sa symétrie.

Remarque 7. Puisque C est un tenseur d'ordre 3, alors on sait que $\beta_i C$ est une simple matrice. Dans un souci de lisibilité, on notera $C_i = \beta_i C = \beta_{i,1} C_{\dots,1} + \beta_{i,2} C_{\dots,2}$.

3.4.2 Bornitude des coefficients de $T(\chi, t)$

Maintenant qu'on dispose d'une fonction $T(\chi, t)$, il faut vérifier que ses coefficients évoluent de façon bornée.

Bornitude des $T_{Q_i}(t)$

On peut prouver la bornitude des coefficients de T_{Q_i} en étudiant la trace notée $tr(T_{Q_i}^* T_{Q_i})$. En effet, en prenant cette trace comme fonction candidate de Lyapunov, on parvient à montrer la stabilité entrée état des éléments de T_{Q_i} (donc leur bornitude si l'entrée est bornée) puisque $tr(T_{Q_i}^* T_{Q_i}) = \sum_{j,k} |t_{j,k}|^2$. On utilise dans cette preuve

l'inégalité suivante : $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$ donc $2ab \leq a^2 + b^2$, et de la même façon on remarque que $2ab \geq -(a^2 + b^2)$.

$$\overline{T_{Q_i}^* T_{Q_i}} = \lambda_i T_{Q_i}^* T_{Q_i} - T_{Q_i}^* A T_{Q_i} - A^T T_{Q_i}^* T_{Q_i} + C_i^T T_{Q_i} \quad (3.4.10)$$

$$+ \lambda_i T_{Q_i}^* T_{Q_i} - T_{Q_i}^* A^T T_{Q_i} - T_{Q_i}^* T_{Q_i} A + T_{Q_i}^* C_i \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned} \overline{tr(T_{Q_i}^* T_{Q_i})} &= 2\lambda_i tr(T_{Q_i}^* T_{Q_i}) \\ &\quad - 2tr(T_{Q_i}^* (A + A^T) T_{Q_i}) + 2\Re\{tr(C_i^T T_{Q_i})\} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

$$-2tr(T_{Q_i}^* (A + A^T) T_{Q_i}) = -2 \sum_{j,k,l} \overline{t_{j,k}} (a_{k,l} + a_{l,k}) t_{l,j} \quad (3.4.13)$$

$$\leq 2 \sup_{k,l} |a_{k,l} + a_{l,k}| \sum_{j,k,l} |\overline{t_{j,k}} t_{l,j}| \quad (3.4.14)$$

$$\leq \sup_{k,l} |a_{k,l} + a_{l,k}| \sum_{j,k,l} |t_{j,k}|^2 + |t_{l,j}|^2 \quad (3.4.15)$$

$$\leq 2 \sup_{k,l} |a_{k,l} + a_{l,k}| tr(T_{Q_i}^* T_{Q_i}) \quad (3.4.16)$$

$$2\Re\{tr(C_i^T T_{Q_i})\} = 2 \sum_{j,k} c_{k,j} \Re\{t_{k,j}\} \quad (3.4.17)$$

$$\leq \sum_{j,k} |c_{k,j}|^2 + |t_{k,j}|^2 \quad (3.4.18)$$

$$\leq tr(C_i^T C_i) + tr(T_{Q_i}^* T_{Q_i}) \quad (3.4.19)$$

En prenant $V(T_{Q_i}) = tr(T_{Q_i}^* T_{Q_i})$, on obtient donc :

$$\dot{V}(T_{Q_i}) \leq V(T_{Q_i})(2\lambda_i + 2\mathcal{A}_1 + 1) + tr(C_i^T C_i), \quad (3.4.20)$$

$$\text{avec } \mathcal{A}_1 = \sup_{k,l} |a_{k,l} + a_{l,k}|. \quad (3.4.21)$$

Puisque les éléments de la matrice A évoluent dans un domaine borné, et que les matrices C_i sont constantes, alors il suffit de choisir λ_i assez grand pour assurer $|2\lambda_i + 2\mathcal{A}_1 + 1| \leq \sigma_1 < 0$ pour tout t et obtenir ainsi la stabilité entrée-état de ce système, et donc de garantir la bornitude des éléments de T_{Q_i} . De plus, en définissant des matrices A_{min} et A_{max} on peut évaluer numériquement les bornes $T_{Q_i min}$ et $T_{Q_i max}$.

Bornitude des $T_{L_i}(t)$

On procède ici de la même façon que précédemment :

$$\begin{aligned} \overline{T_{L_i}^* T_{L_i}} &= \lambda_i T_{L_i}^* T_{L_i} - T_{L_i}^* A T_{L_i} - y_f^T B^T (\overline{T_{Q_i}} + T_{Q_i}^*) T_{L_i} \\ &\quad + \lambda_i T_{L_i}^* T_{L_i} - T_{L_i}^* A^T T_{L_i} - T_{L_i}^* (T_{Q_i} + T_{Q_i}^T) B y_f \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

$$\overline{tr(T_{L_i}^* T_{L_i})} = 2\lambda_i tr(T_{L_i}^* T_{L_i}) - tr(T_{L_i}^* (A + A^T) T_{L_i}) - 2\Re\{y_f^T B^T (\overline{T_{Q_i}} + T_{Q_i}^*) T_{L_i}\} \quad (3.4.23)$$

$$-T_{L_i}^*(A + A^T)T_{L_i} = -\sum_{j,k} \bar{t}_j (a_{j,k} + a_{k,j}) t_k \quad (3.4.24)$$

$$\leq \sup_{j,k} |a_{j,k} + a_{k,j}| \sum_{j,k} |\bar{t}_j t_k| \quad (3.4.25)$$

$$\leq \sup_{j,k} |a_{j,k} + a_{k,j}| \sum_{j,k} \frac{|t_j|^2 + |t_k|^2}{2} \quad (3.4.26)$$

$$\leq \sup_{j,k} |a_{j,k} + a_{k,j}| T_{L_i}^* T_{L_i} \quad (3.4.27)$$

$$-2\Re\{(By_f)^T(\overline{T_{Q_i}} + T_{Q_i}^*)T_{L_i}\} = -2\sum_{j,k} \Re\{(By_f)_j \overline{(t_{q_{i,j,k}} + t_{q_{i,k,j}})} t_k\} \quad (3.4.28)$$

$$\leq 2\sup_{j,k} |t_{q_{i,j,k}} + t_{q_{i,k,j}}| \sum_{j,k} |(By_f)_j t_k| \quad (3.4.29)$$

$$\leq \sup_{j,k} |t_{q_{i,j,k}} + t_{q_{i,k,j}}| \sum_{j,k} (By_f)_j^2 + |t_k|^2 \quad (3.4.30)$$

$$\leq \sup_{j,k} |t_{q_{i,j,k}} + t_{q_{i,k,j}}| [(By_f)^T (By_f) + T_{L_i}^* T_{L_i}] \quad (3.4.31)$$

En prenant $V(T_{L_i}) = T_{L_i}^* T_{L_i}$, on obtient :

$$\dot{V}(T_{L_i}) \leq V(T_{L_i})(2\lambda_i + \mathcal{A}_1 + \mathcal{T}_q) + \mathcal{T}_q (By_f)^T (By_f), \quad (3.4.32)$$

$$\text{avec } \mathcal{T}_q = \sup_{j,k} |t_{q_{i,j,k}} + t_{q_{i,k,j}}|. \quad (3.4.33)$$

Ce système est stable entrée-état si $|2\lambda_i + \mathcal{A}_1 + T_{Q_{i,max}}| \leq \sigma_2 < 0$ pour tout t , ce qui implique T_{L_i} borné si $y_f(t)$ est borné.

Bornitude des $T_{C_i}(t)$

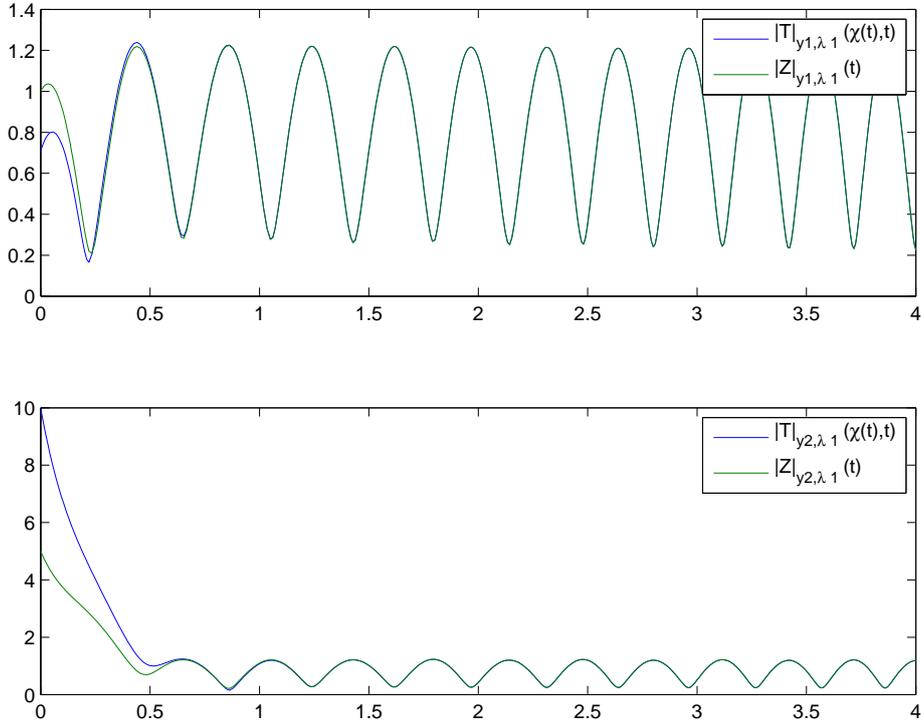
Étant donné que la partie réelle des λ_i est négative, les T_{C_i} sont nécessairement bornés si $y_f(t)$ et T_{L_i} sont bornés.

3.4.3 Simulation

On présente ici les résultats obtenus pour cet observateur, dont le principal intérêt est qu'il confirme la pertinence de notre démarche, même si cette version n'est pas implantable de façon réaliste.

La simulation a été réalisée avec les paramètres et signaux suivants : $a_1 = a_2 = b = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $u_3 = 3$ et $k = 5$. L'observateur est donc implanté par le système $\dot{z} = \Lambda z + \beta y$, avec les paramètres suivants :

$$\Lambda = -5\mathbb{I}_6 + \text{diag}(2.5, 5, 7.5, 2.5, 5, 7.5) \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.34)$$

FIG. 3.1 – Convergence de $z_i(t) \rightarrow T_i(\chi(t), t)$

Le système réel simulé est initialisé à $\chi_0 = (\cos x_3 \sin x_3 x_4 \tau)^T = (0.7 \ 0.7 \ 10 \ -1)^T$, et l'observateur est pour sa part initialisé à $\hat{\chi}_0 = (1 \ 0 \ 5 \ -2)^T$ avec l'état initié à $z_0^T = T_0^T(\chi_0) = (\mathbb{I}_n \ \mathbf{0})\chi_0$. La figure 3.1 montre la convergence de $z(t) \rightarrow T(\chi(t), t)$ pour deux composantes différentes de l'état z de l'observateur.

3.5 Inversion de $T(\chi, t)$

Notre problème maintenant est, étant donné z_i et t , trouver χ satisfaisant :

$$z_i = T_i(\chi, t), \text{ avec } i \in \{1, \dots, q\}. \quad (3.5.1)$$

Cet ensemble d'équations n'a en général pas de solution et il faut se contenter d'une solution "au mieux". Nous devons donc introduire un critère pour définir ce "au mieux". Vu que $T(\chi, t)$ est polynomial en χ , la minimisation de ce critère devrait nous mener à la résolution d'équations polynomiales.

La résolution de telles équations est l'objet d'une vaste littérature en analyse numérique et calcul formel. Malheureusement, les techniques les plus courantes sont issues de l'optimisation statique, ce qui générerait beaucoup de calcul ne serait pas viable dans un contexte de contrôle temps réel. Nous avons plutôt cherché à tirer parti de la structure de nos modèles, et de la continuité dans le temps des solutions de nos systèmes dynamiques. Cela nous a conduit à implanter une méthode de continuation. Cette technique de continuation nous fournit une prédiction de l'évolution de l'état reconstruit, à

partir de la connaissance de l'évolution de l'état de notre observateur.

3.5.1 Méthode de continuation

Considérons un critère $J(z, \chi, t)$ d'optimalité de reconstruction, dérivable en tout point, par exemple l'erreur quadratique. Supposons l'existence d'un minimum global χ_{opt} à cette fonction, ce minimum étant la reconstruction optimale de χ au sens du critère. De fait, la dérivée du critère en ce minimum est nulle :

$$\left. \frac{\partial J(z, \chi, t)}{\partial \chi} \right|_{\chi=\chi_{opt}} = \mathbf{0}. \quad (3.5.2)$$

Si on modifie de façon différentiable z et t , disons comme des fonctions d'un paramètre τ , alors on trouve que χ_{opt} dépend aussi de τ en satisfaisant :

$$\left. \frac{d}{d\tau} \frac{\partial J(z, \chi, t)}{\partial \chi} \right|_{\chi=\chi_{opt}} = \mathbf{0} = \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \chi} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial^2 J}{\partial \chi^2} \frac{d\chi_{opt}}{d\tau} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial \chi} \frac{dz}{d\tau}. \quad (3.5.3)$$

On peut donc suivre par continuation le χ_{opt} , optimum au sens du critère, simplement en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{d\chi_{opt}}{d\tau} = -\frac{\partial^2 J^{-1}}{\partial \chi^2} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \chi} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial \chi} \frac{dz}{d\tau} \right), \quad (3.5.4)$$

sous réserve que $\frac{\partial^2 J}{\partial \chi^2}$ soit inversible.

3.5.2 Application à notre observateur

Utilisons la méthode de continuation pour suivre par continuation $\hat{\chi}$ le long d'un chemin défini par la donnée de la fonction $\tau = t \mapsto (z(t), t)$, minimisant l'erreur définie par $\xi(z, \hat{\chi}, t) = (z - T(\hat{\chi}, t))$ avec le critère quadratique suivant :

$$\hat{\chi}(t) = \arg \min_{\chi \in \mathbb{R}^n} \xi^* \xi. \quad (3.5.5)$$

Nous obtenons :

$$\left. \frac{\partial J(z, \chi, t)}{\partial \chi} \right|_{\chi=\hat{\chi}} = \mathbf{0} = -\xi^* \frac{\partial T}{\partial \chi} - \overline{\xi^* \frac{\partial T}{\partial \chi}} = -2\Re \left\{ \xi^* \frac{\partial T}{\partial \chi} \right\}, \quad (3.5.6)$$

$$\begin{aligned} \text{et donc : } \left. \frac{d}{d\tau} \frac{\partial J(z, \chi, t)}{\partial \chi} \right|_{\chi=\hat{\chi}} = \mathbf{0} = & -2\Re \left\{ \left(\xi^* \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \chi} - \frac{\partial T^*}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \chi} \right) \right. \\ & \left. + \left(\xi^* \frac{\partial^2 T}{\partial \chi^2} - \frac{\partial T^*}{\partial \chi} \frac{\partial T}{\partial \chi} \right) \frac{d\chi}{dt} + \frac{\partial T^*}{\partial \chi} \frac{dz}{dt} \right\}, \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

soit finalement

$$\Re \left\{ \xi^* \frac{\partial^2 T}{\partial \chi^2} - \frac{\partial T^*}{\partial \chi} \frac{\partial T}{\partial \chi} \right\} \frac{d\hat{\chi}}{dt} = \Re \left\{ \left(\xi^* \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \chi} - \frac{\partial T^*}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial T^*}{\partial \chi} \frac{dz}{dt} \right\}. \quad (3.5.8)$$

3.5.3 Stabilisation de la solution

L'équation (3.5.4) n'a de sens que lorsqu'on évalue les termes pour une valeur particulière $\chi = \hat{\chi}$ qui minimise le critère quadratique. Or en pratique, par exemple du fait de perturbations numériques, $\hat{\chi}$ peut s'écarter d'un argument minimisant. Il est donc nécessaire de modifier (3.5.4) pour introduire un terme de stabilisation de la variété définie par l'équation (3.5.6).

Avec les notations générales du paragraphe 3.5.1, nous modifions l'objectif de satisfaire pour tout τ

$$\left. \frac{\partial J(z, \chi, t)}{\partial \chi} \right|_{\chi=\hat{\chi}} = \mathbf{0}, \quad (3.5.9)$$

en l'objectif de satisfaire

$$\frac{d}{d\tau} \left| \left. \frac{\partial J(z, \chi, t)}{\partial \chi} \right|_{\chi=\hat{\chi}} \right|^2 \leq \mathbf{0}. \quad (3.5.10)$$

En d'autres termes, au lieu de vouloir conserver le gradient à une valeur nulle, on cherche à assurer la décroissance de son module le long du chemin τ . Ceci conduit donc à remplacer l'équation (3.5.4) par

$$\frac{d\chi_{opt}}{d\tau} = -\frac{\partial^2 J^{-1}}{\partial \chi^2} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \chi} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial \chi} \frac{dz}{d\tau} + k \frac{\partial J}{\partial \chi} \right), \quad (3.5.11)$$

avec $k > 0$.

Remarque 8. Cette technique de stabilisation du suivi de la solution est très étroitement liée à une résolution par la méthode de Newton.

3.6 Simulation

La simulation illustrée par la figure 3.2 à été réalisée dans les mêmes conditions d'initialisation et avec les mêmes signaux d'entrée que celle présentée dans la section 3.4.3. On voit que la reconstruction $\hat{\chi}$ converge vers la valeur réelle de χ au bout d'une durée qui dépend (i) de la vitesse de convergence de $z(t) \rightarrow T(\chi(t), t)$, et (ii) de la vitesse à laquelle notre méthode de continuation permet de rejoindre une solution optimale au problème d'inversion, au départ d'une solution suffisamment "proche" de la solution optimale.

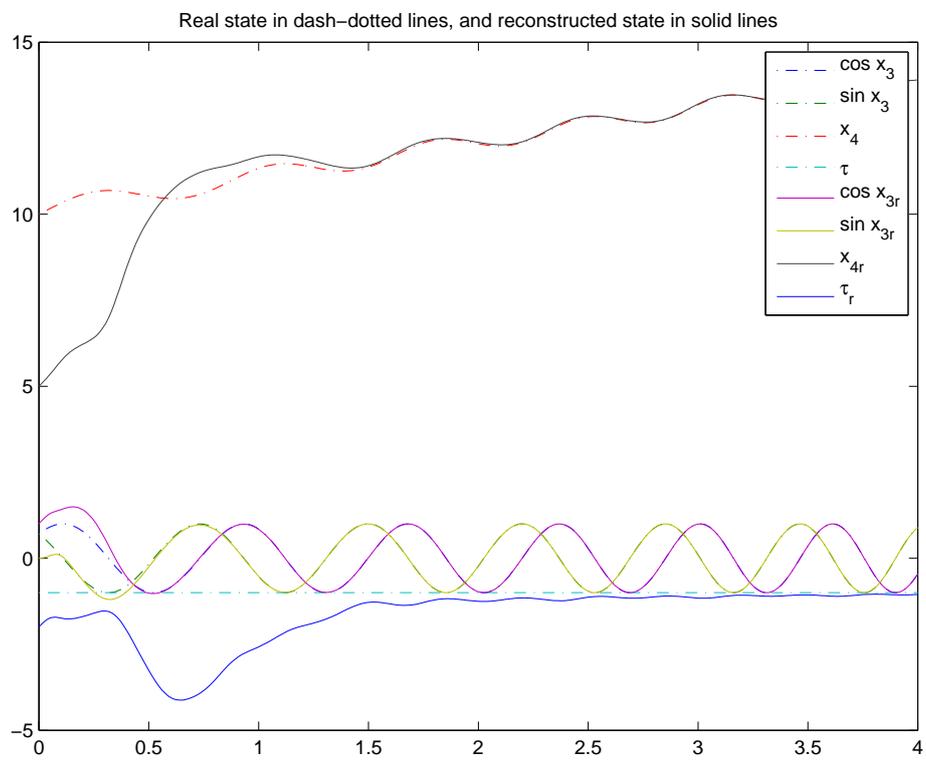


FIG. 3.2 – Solution réelles et reconstruites issuent du système 3.1.5

Chapitre 4

Réalisation de l'observateur

4.1 Introduction

L'observateur (3.3.5) présenté dans le chapitre précédent demande la connaissance des observations fictives y_{f_1} et y_{f_2} que nous ne mesurons pas. Il peut néanmoins être implanté, ainsi que les filtres T_{Q_i} , T_{L_i} , et T_{C_i} . En effet puisqu'on a :

$$y_{f_1} = u_1 - \dot{x}_1 \qquad y_{f_2} = u_2 - \dot{x}_2 \qquad (4.1.1)$$

une réalisation de, par exemple

$$\dot{z} = \lambda z + k(t)y_{f_1} \qquad (4.1.2)$$

est donnée par le système

$$\overbrace{\dot{z} + k(t)x_1}^{\dot{\zeta}} = \dot{\zeta} = \lambda z + k(t)u_1 + \dot{k}(t)x_1 \qquad z = \zeta - k(t)x_1 \qquad (4.1.3)$$

pour peu que le signal \dot{k} soit accessible.

Par contre, la mise en oeuvre de la technique de continuation pose problème, car elle requiert, entre autres choses, la connaissance de $\partial T / \partial t$ alors que l'observateur réalisé avec la technique suggérée ci-dessus ne nous la donne pas.

L'observateur présenté dans le chapitre précédent constitue néanmoins donc un premier pas vers l'observation des moteurs synchrones pour une commande sans capteur, et il nous a permis de tester par la simulation cette technique de synthèse de l'observateur pour des systèmes dont la sortie est sous forme quadratique.

À défaut de proposer une autre méthode pour obtenir $\hat{\chi}$ à partir de z , nous sommes amenés à travailler avec un modèle plus complet du système. Mais pour cela nous nous appuyerons sur ce que nous avons fait pour le modèle réduit.

4.2 Modèle plus complet du moteur

On disposait dans le chapitre précédent du modèle suivant : $\dot{\chi} = A(t)\chi + By_f(t)$, avec $y_f = u - \dot{y}$, où y représente le vecteur de sorties du moteur, soit $(x_1 \ x_2)^T$. Or, on a également vu que l'on pouvait exprimer la sortie fictive y_f dans des termes quadratiques en χ : $y_f = \chi^T C \chi$. On peut alors substituer ce terme dans l'équation de

dynamique, et augmenter l'état du système pour intégrer ce qui constitue la sortie du modèle. Le modèle se réécrit donc :

$$\dot{\chi} = A(t)\chi + B\chi^T C\chi, \quad (4.2.1a)$$

$$\dot{\psi} = u - \chi^T C\chi, \quad (4.2.1b)$$

$$y = \psi. \quad (4.2.1c)$$

Avec $\chi \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^p$, et les matrices A , B , et C définies comme dans (3.3.3).

4.3 Adaptation de l'observateur

Pour le modèle réduit (3.3.4) satisfait aussi par les solutions du modèle complet (4.2.1a), on avait défini l'observateur KKL suivant : $\dot{z} = \Lambda z + \beta y_f$. D'après ce qui précède, on peut le réaliser par :

$$\dot{\zeta} = \Lambda(\zeta - \beta y) + \beta u, \quad z = \zeta - \beta y. \quad (4.3.1)$$

Considérons maintenant que ζ et non plus z est l'état de l'observateur, nous déduisons du chapitre précédant que nous devons remplacer T par \mathcal{T} donné par :

$$\mathcal{T}(\chi, \psi, t) = T(\chi, t) - \beta\psi. \quad (4.3.2)$$

Cette fonction doit satisfaire :

$$\dot{\mathcal{T}}(\chi, \psi, t) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \chi} \dot{\chi} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = \Lambda(\mathcal{T} - \beta y) + \beta u. \quad (4.3.3)$$

4.4 Expression de $\mathcal{T}(\chi, \psi, t)$

Dans (4.2.1a), en posant $\tilde{\chi} = \chi + B\psi$, et en substituant ψ par y dans la réalisation, on obtient

$$\dot{\tilde{\chi}} = A(t)(\tilde{\chi} - B\psi) + B\psi, \quad (4.4.1a)$$

$$\dot{\psi} = u - [\tilde{\chi} - B\psi]^T C[\tilde{\chi} - B\psi], \quad (4.4.1b)$$

$$y = \psi. \quad (4.4.1c)$$

On en déduit que $\psi((\tilde{\chi}_0, \psi_0), t, t_0)$ la composante ψ de la solution est une fonction linéaire de ψ_0 et polynomiale de degré 2 de $\tilde{\chi}_0$. Selon le même raisonnement que pour T , on en conclut que nous pouvons prendre pour \mathcal{T} une fonction de même type et donc polynomiale du second de degré en χ et ψ , soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\chi, \psi, t) = & \chi^T \mathcal{T}_{\chi\chi_i}(t)\chi + \chi^T \mathcal{T}_{\chi_i}(t) + \chi^T \mathcal{T}_{\chi\psi_i}(t)\psi \\ & + \psi^T \mathcal{T}_{\psi\psi_i}(t)\psi + \psi^T \mathcal{T}_{\psi_i}(t) + \mathcal{T}_{0_i}(t), \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

ou encore

$$\mathcal{T}_i(\chi, \psi, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi^T & \psi^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathcal{T}_{\chi\chi_i}(t) & \mathcal{T}_{\chi\psi_i}(t) & \mathcal{T}_{\chi_i}(t) \\ \mathcal{T}_{\chi\psi_i}^T(t) & 2\mathcal{T}_{\psi\psi_i}(t) & \mathcal{T}_{\psi_i}(t) \\ \mathcal{T}_{\chi_i}^T(t) & \mathcal{T}_{\psi_i}^T(t) & 2\mathcal{T}_{0_i}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.3)$$

Puisqu'on cherche à satisfaire l'expression de \mathcal{T} donnée par (4.3.3), nous avons besoin de l'expression des équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \chi} \dot{\chi} &= (A\chi + B\chi^T C\chi)^T (\mathcal{T}_{\chi\chi_i} \chi + \mathcal{T}_{\chi_i} + \mathcal{T}_{\chi\psi_i} \psi) \\ &\quad + \chi^T \mathcal{T}_{\chi\chi_i} (A\chi + B\chi^T C\chi), \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \psi} \dot{\psi} = (u - \chi^T C\chi)^T (\mathcal{T}_{\psi\psi_i} \psi + \mathcal{T}_{\psi_i}) + (\psi^T \mathcal{T}_{\psi\psi_i} + \chi^T \mathcal{T}_{\chi\psi_i})(u - \chi^T C\chi), \quad (4.4.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = \chi^T \dot{\mathcal{T}}_{\chi\chi_i} \chi + \chi^T \dot{\mathcal{T}}_{\chi_i} + \chi^T \dot{\mathcal{T}}_{\chi\psi_i} \psi + \psi^T \dot{\mathcal{T}}_{\psi\psi_i} \psi + \psi^T \dot{\mathcal{T}}_{\psi_i} + \dot{\mathcal{T}}_{0_i}. \quad (4.4.6)$$

À partir desquelles on peut identifier les équations suivantes, à partir de la factorisation des termes quadratiques, linéaires, ou indépendants de χ :

$$(\chi^T \cdot \chi^T C\chi) \quad (\mathcal{T}_{\chi\chi_i} + \mathcal{T}_{\chi\chi_i}^T)B - \mathcal{T}_{\chi\psi_i} = 0 \quad (4.4.7)$$

$$(\chi^T C\chi \cdot) \quad B^T (\mathcal{T}_{\chi_i} + \mathcal{T}_{\chi\psi_i} \psi) - (\mathcal{T}_{\psi\psi_i}^T + \mathcal{T}_{\psi\psi_i})\psi - \mathcal{T}_{\psi_i} + \mathbf{K}_i = 0 \quad (4.4.8)$$

$$(\chi^T \cdot \chi) \quad A^T \mathcal{T}_{\chi\chi_i} + \mathcal{T}_{\chi\chi_i} A + \dot{\mathcal{T}}_{\chi\chi_i} = \lambda_i \mathcal{T}_{\chi\chi_i} + \mathbf{K}_i \mathbf{C} \quad (4.4.9)$$

$$(\chi^T \cdot) \quad (A^T - \lambda_i \mathbb{I}_n)(\mathcal{T}_{\chi_i} + \mathcal{T}_{\chi\psi_i} \psi) + \mathcal{T}_{\chi\psi_i} u + \dot{\mathcal{T}}_{\chi_i} + \dot{\mathcal{T}}_{\chi\psi_i} \psi = 0 \quad (4.4.10)$$

$$\begin{aligned} (\cdot) \quad u^T (2\mathcal{T}_{\psi\psi_i} \psi + \mathcal{T}_{\psi\psi_i}) + \psi^T \dot{\mathcal{T}}_{\psi\psi_i} \psi + \psi^T \dot{\mathcal{T}}_{\psi_i} + \dot{\mathcal{T}}_{0_i} \\ = \lambda_i (\psi^T \mathcal{T}_{\psi\psi_i} \psi + \psi^T \mathcal{T}_{\psi_i} + \mathcal{T}_{0_i} - \beta_i y) + \beta_i u \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

On a introduit le terme \mathbf{K} pour que l'équation satisfaite par $\mathcal{T}_{\chi\chi_i}$ soit de même nature que celle satisfaite par \mathcal{T}_{Q_i} en (3.4.9), l'objectif étant de retrouver le fait que la fonction \mathcal{T} obtenue soit aussi injective en (χ, ψ) .

Ces équations nous permettent d'identifier $\mathcal{T}_{\chi\chi_i}$, \mathcal{T}_{χ_i} et \mathcal{T}_{0_i} par des équations différentielles ainsi que \mathcal{T}_{ψ_i} et $\mathcal{T}_{\chi\psi_i}$ par des équations algébriques. Le choix de $\mathcal{T}_{\psi\psi_i}$ est libre, mais on va le choisir de façon à annuler la dépendance en ψ de \mathcal{T}_{ψ_i} , afin de garantir la réalisabilité de $\dot{\mathcal{T}}_{\psi_i}$. En remplaçant ψ par les mesures réelles, on obtient donc l'implantation suivante pour les coefficients de \mathcal{T} :

$$\dot{\mathcal{T}}_{\chi\chi_i} = \lambda_i \mathcal{T}_{\chi\chi_i} - A^T \mathcal{T}_{\chi\chi_i} - \mathcal{T}_{\chi\chi_i} A + K_i C \quad (4.4.12a)$$

$$\mathcal{T}_{\chi\psi_i} = 2\mathcal{T}_{\chi\chi_i} B \quad (4.4.12b)$$

$$\dot{\mathcal{T}}_{\chi_i} = (\lambda_i \mathbb{I}_n - A^T)(\mathcal{T}_{\chi_i} + \mathcal{T}_{\chi\psi_i} y) - \mathcal{T}_{\chi\psi_i} u - \dot{\mathcal{T}}_{\chi\psi_i} y \quad (4.4.12c)$$

$$\mathcal{T}_{\psi\psi_i} = B^T \mathcal{T}_{\chi\chi_i} B \quad (4.4.12d)$$

$$\mathcal{T}_{\psi_i} = B^T \mathcal{T}_{\chi_i} + K_i \quad (4.4.12e)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{T}}_{0_i} &= \lambda_i (y^T \mathcal{T}_{\psi\psi_i} y + y^T \mathcal{T}_{\psi_i} + \mathcal{T}_{0_i} - \beta_i y) \\ &\quad + \beta_i u - u^T (2\mathcal{T}_{\psi\psi_i} y + \mathcal{T}_{\psi\psi_i}) - y^T \dot{\mathcal{T}}_{\psi\psi_i} y - y^T \dot{\mathcal{T}}_{\psi_i} \end{aligned} \quad (4.4.12f)$$

Comme dans le cas de l'observateur non implantable, ces équations sont linéaires avec une structure triangulaire, donc il est possible de donner des conditions sur λ_i afin de garantir la bornitude des éléments de $\mathcal{T}_{\chi\chi_i}$, \mathcal{T}_{χ_i} et \mathcal{T}_{0_i} .

4.5 Inversion de $T(\chi, \psi, t)$ par continuation

D'une manière analogue à ce qui a été fait précédemment, on peut donner l'expression pour réaliser un suivi localement asymptotiquement stable du couple (χ_{opt}, ψ_{opt}) optimal au sens d'un critère, sous réserve d'inversibilité de la matrice Hessienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \chi^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \chi \partial \psi} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \psi \partial \chi} & \frac{\partial^2 J}{\partial \psi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\hat{\chi}}{dt} \\ \frac{d\hat{\psi}}{dt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \chi} + \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta \partial \chi} \frac{d\zeta}{dt} + k_\chi \frac{\partial J}{\partial \chi} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \psi} + \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta \partial \psi} \frac{d\zeta}{dt} + k_\psi \frac{\partial J}{\partial \psi} \end{pmatrix} \quad (4.5.1)$$

avec le critère quadratique

$$J(\zeta, \chi, \psi, t) = |\zeta - T(\chi, \psi, t)|^2. \quad (4.5.2)$$

4.6 Simulations de l'observateur

On présente ici des résultats de simulation, mais l'ensemble des degrés de liberté de l'observateur n'ont pas fait l'objet d'une étude approfondie, et le choix des Λ , de β , de K (dans l'équation (4.4.8)), ou des k_x (équations (3.5.11) et (4.5.1)) utilisés ici sont assez arbitraires, et nécessiteraient une investigation poussée.

Les simulations se font en deux temps :

- D'une part on réalise une simulation sans reconstruction de l'état sur un intervalle de temps inférieur à l'instant initial de reconstruction, de façon à garantir $z(t_0) \simeq T(\chi_0, t_0)$.
- Ensuite on poursuit la simulation en reconstruisant par continuation l'état du moteur. On verra que la valeur initiale de l'état reconstruit joue un rôle dans la qualité de la reconstruction.

Pour ces simulations, les paramètres sont laissés aux valeurs suivantes : $a_1 = a_2 = 1$, $b = 1$ et par analogie avec la version non implantable, on choisit $K = \beta$ et $k_\chi = k_\psi = 10$. L'observateur est implanté avec :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

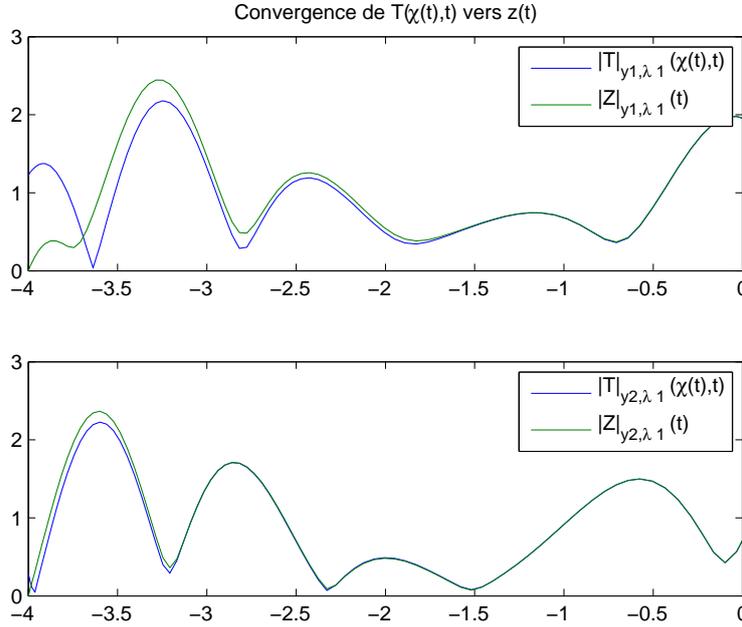
avec $\alpha = 3 \text{diag}(0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5)(\mathbb{I}_{6\ell} - \mathbb{I}_6)$

En ce qui concerne les signaux d'entrée, on choisit $\tau(t) = 0$, $u_3(t) = 0$, et on a choisi $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de façon à avoir les trajectoires suivantes :

$$x_4(t) = 4 + \sin(\Omega t), \quad \text{avec } \Omega = \frac{\pi}{5} \quad (4.6.1)$$

$$x_1(t) = \frac{\Omega}{b} \sin(x_3(t) + \Omega t), \quad (4.6.2)$$

$$x_2(t) = \frac{\Omega}{b} \cos(x_3(t) + \Omega t). \quad (4.6.3)$$

FIG. 4.1 – Convergence de $z_i(t) \rightarrow T_i(\chi(t), \psi(t), t)$

En ce qui concerne l'état z de l'observateur et des coefficients $\mathcal{T}_{x_{x_i}}$, \mathcal{T}_{x_i} , et \mathcal{T}_{0_i} , ils sont initialisés à 0. On peut voir sur la figure 4.1 la convergence de $z(t)$ vers $\mathcal{T}(\chi, \psi, t)$ au cours de la période de simulation sans reconstruction de l'état.

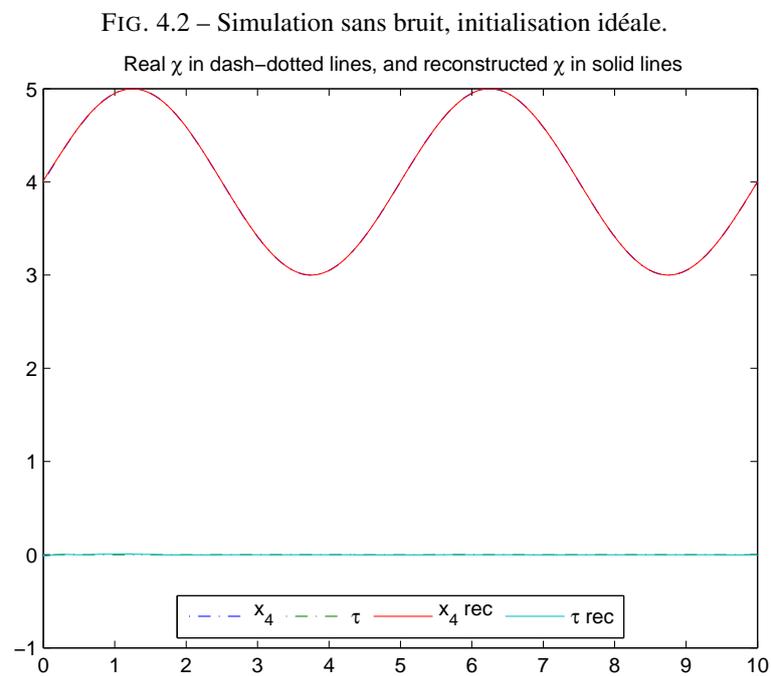
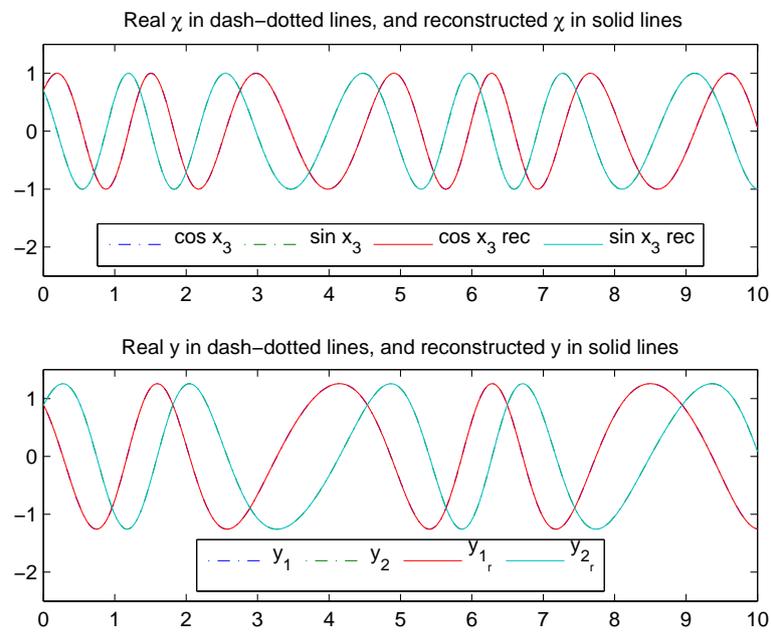
4.6.1 Simulations dans le cas idéal

On présente dans cette section des simulations dans un contexte idéal, c'est à dire non bruité, et sans erreur de modélisation.

Pour commencer, la figure 4.2 montre une simulation avec une initialisation parfaite sur la solution réelle à reconstruire. Cette simulation n'a pas grand intérêt en pratique, mais permet de constater le bon fonctionnement de l'observateur. On peut remarquer une très légère divergence sur la reconstruction de τ dans le début de la simulation, c'est dû au fait que le $\hat{\chi}$ avec lequel on a initialisé l'observateur n'est pas tout à fait la solution optimale au critère quadratique, puisque l'on a $z_0 \neq \mathcal{T}(\chi_0, \psi_0, t_0)$.

Maintenant, à la place d'avoir une initialisation idéale pour χ_0 , on prend une valeur erronée, dont les résultats de la simulation sont visibles sur la figure 4.3. Il se produit alors une situation intéressante : notre technique de reconstruction suit une solution qui n'est pas globalement optimale, seulement localement. Le résultat obtenu n'a pas de signification physique, mais on voit que au bout d'un certain temps les conditions qui permettent le suivi de cet optimum local disparaissent, et on se met à suivre définitivement l'optimum global.

Enfin, la figure 4.4 présente la simulation avec une initialisation satisfaisante, obtenue tout simplement en réalisant une optimisation statique pour les valeurs obtenues de z_0 et $\mathcal{T}(\chi_0, \psi_0, t)$. On utilise pour cela la fonction `lsqnonlin` de matlab, sans



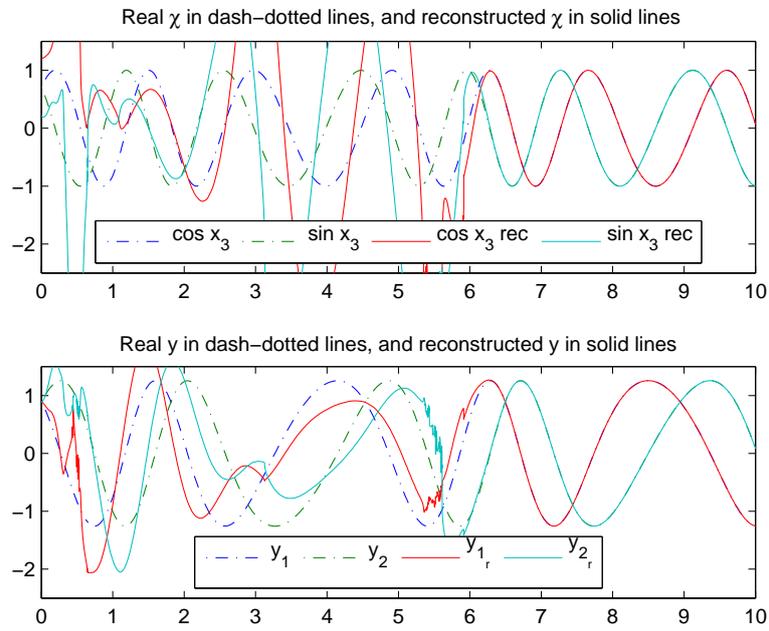
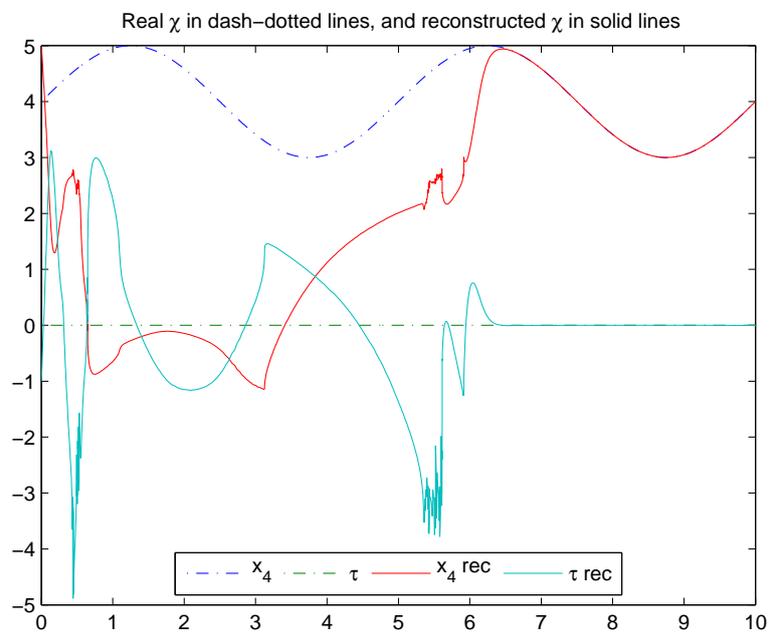


FIG. 4.3 – Simulation sans bruit, initialisation erronée.



option particulière, de façon à obtenir une solution naïve mais relativement proche de l'optimum. On voit sur la simulation que la valeur obtenue n'est pas l'optimum, ce qui provoque un léger dépassement de l'observateur, mais l'observateur converge rapidement vers l'état réel du système. Dans la suite des simulations proposées ici, c'est cette méthode que l'on utilise à chaque fois pour initialiser l'observateur.

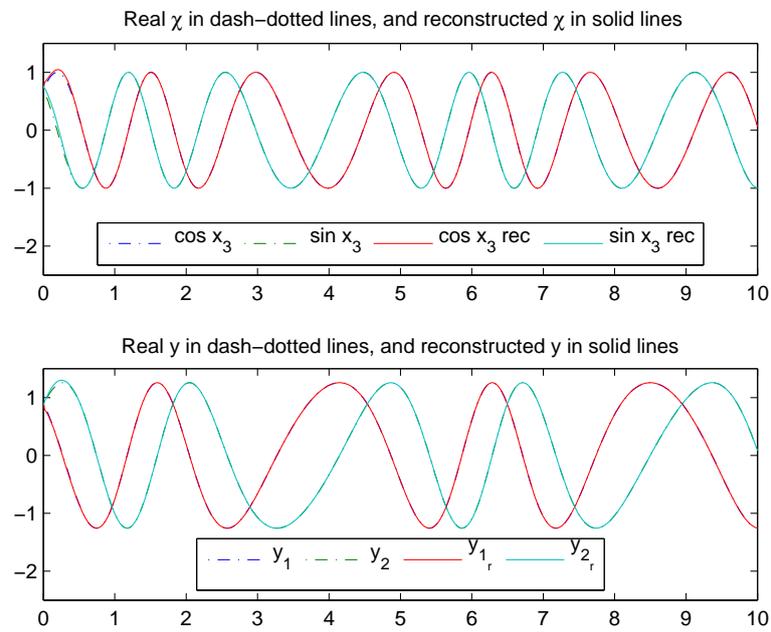
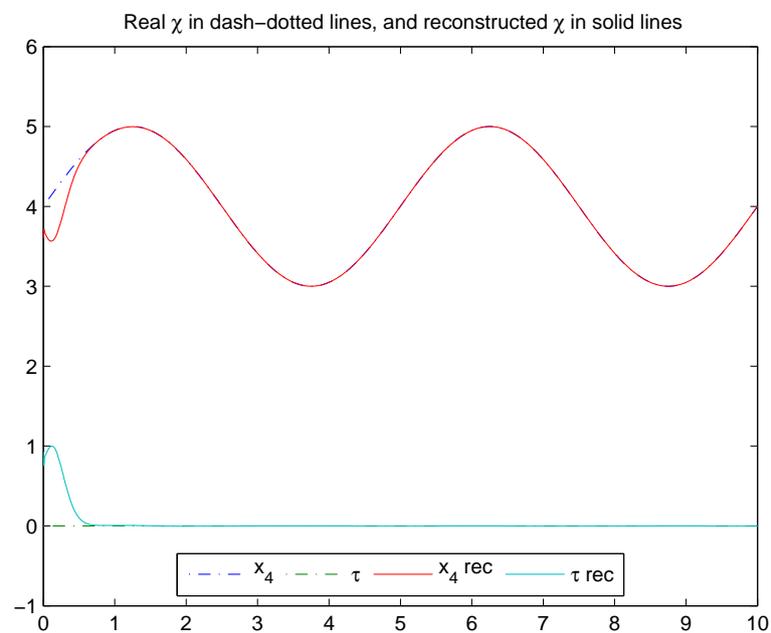
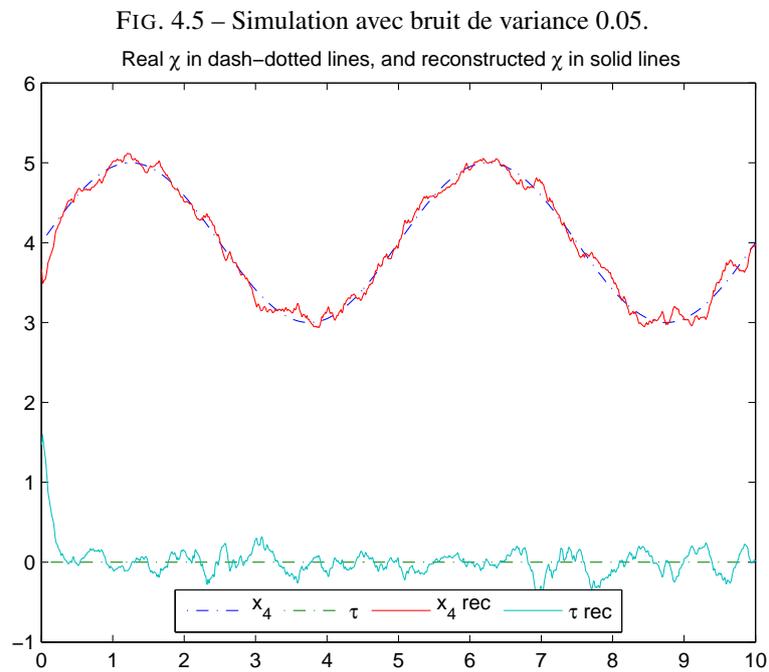
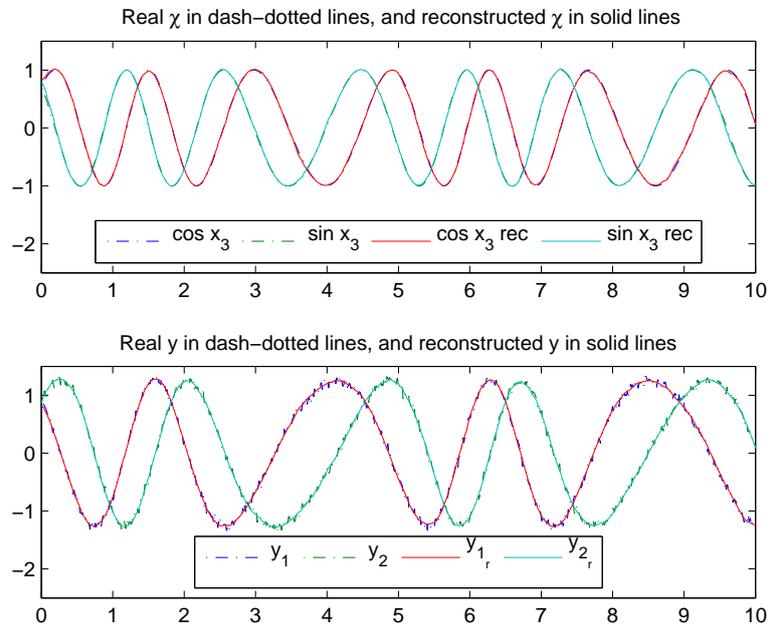
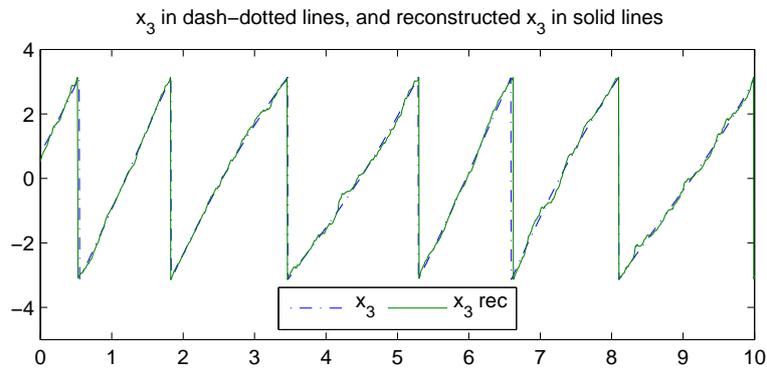


FIG. 4.4 – Simulation sans bruit, initialisation par optimisation.



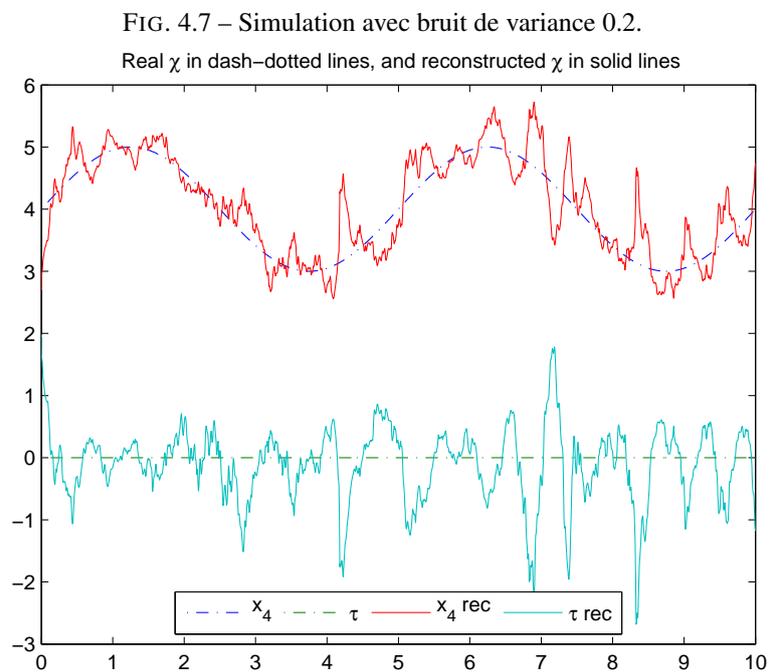
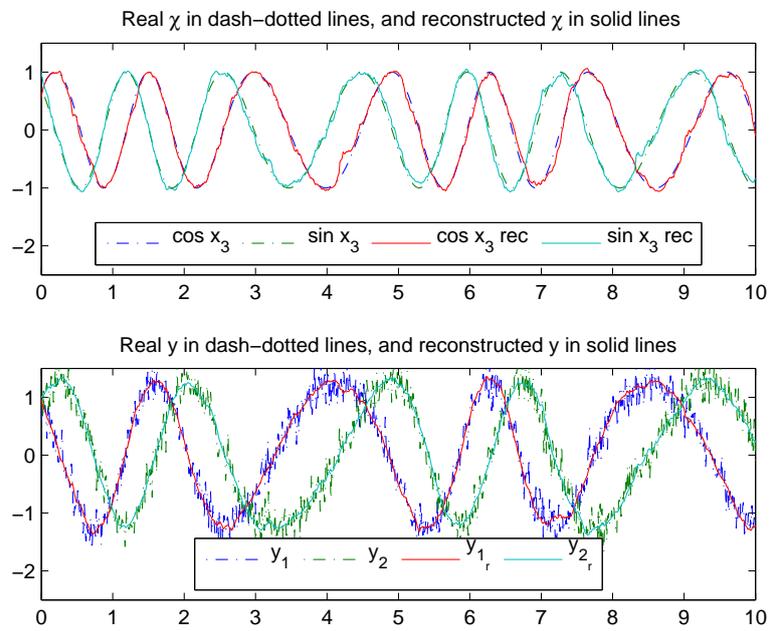


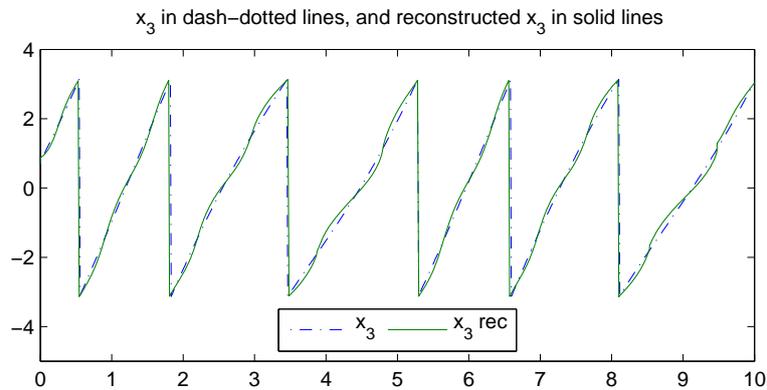
FIG. 4.6 – Reconstruction de x_3 dans un contexte fortement bruité.

4.6.2 Simulations avec des mesures bruitées

Les figures 4.5 à 4.7 concernent des simulations dans un contexte bruité. Dans un premier temps, on présente les résultats (figure 4.5) dans un contexte de bruit raisonnablement faible : on a choisi un bruit de mesure, gaussien, centré, et décorrélé, de variance 0.05. On voit que la reconstruction de x_3 ne souffre pas trop du bruit, mais on ne peut pas en dire autant en ce qui concerne τ et x_4 , dont les reconstructions sont plutôt entachées de bruit.

Dans un second temps, on réalise une simulation avec un taux de bruit élevé, de variance 0.2. Les résultats sont présentés dans la figure 4.6. On peut y voir, sans grande surprise, que la reconstruction de τ et x_4 est fortement affectée par le bruit, mais ce n'est pas le cas de x_3 qui est plutôt bien reconstruit. La figure 4.7 montre la reconstruction de x_3 obtenue avec la fonction `atan2` dans ce contexte fortement bruité. On peut alors apprécier que l'angle x_3 obtenu est très proche de la valeur réelle simulée.



FIG. 4.8 – Reconstruction de x_3 avec une incertitude sur a_1 .

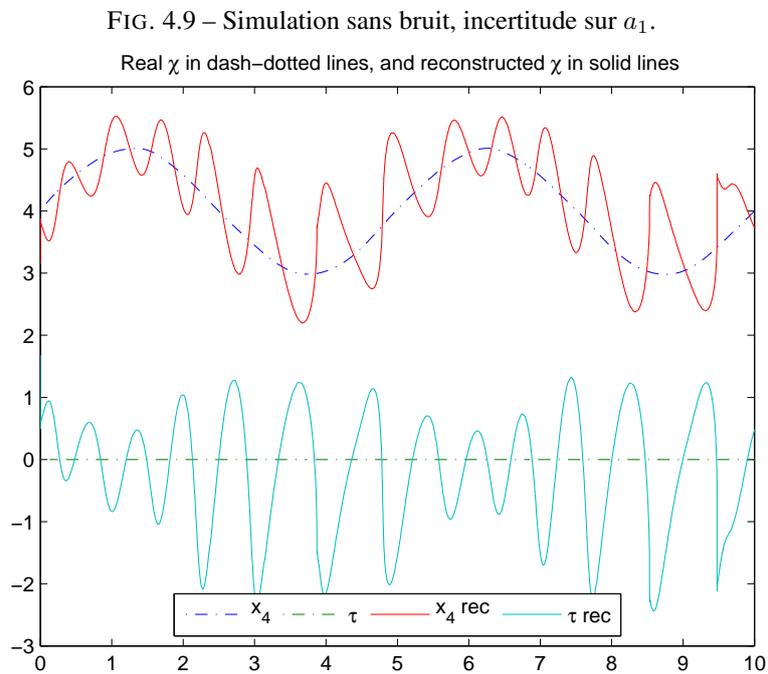
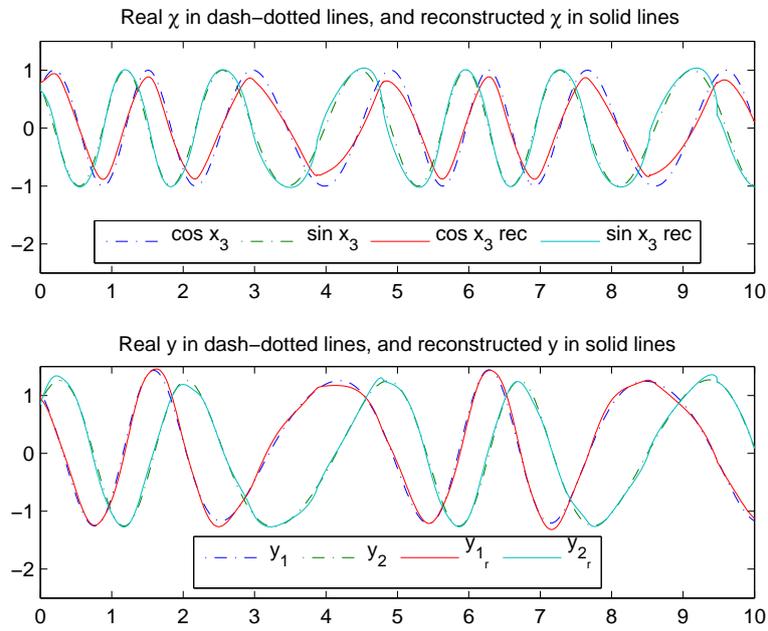
4.6.3 Simulations avec des incertitudes de modélisation

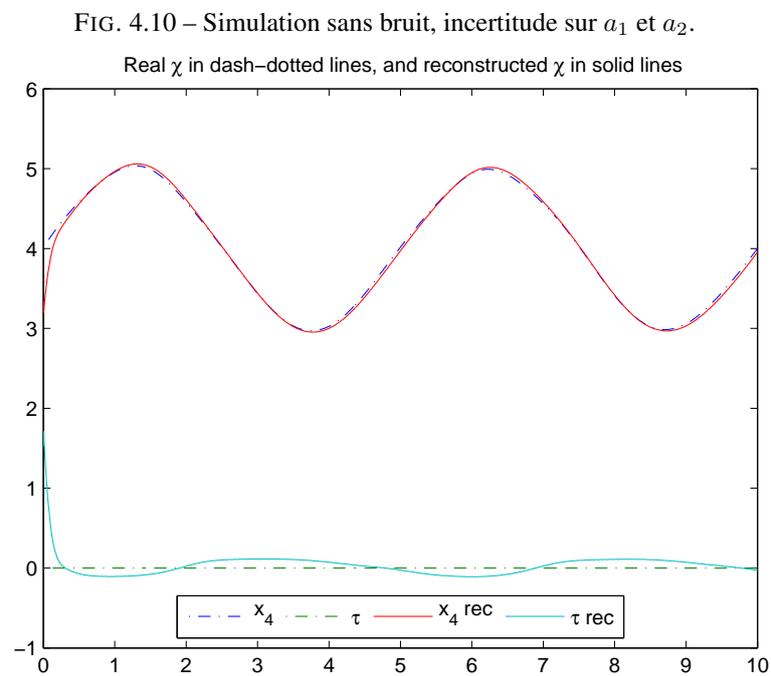
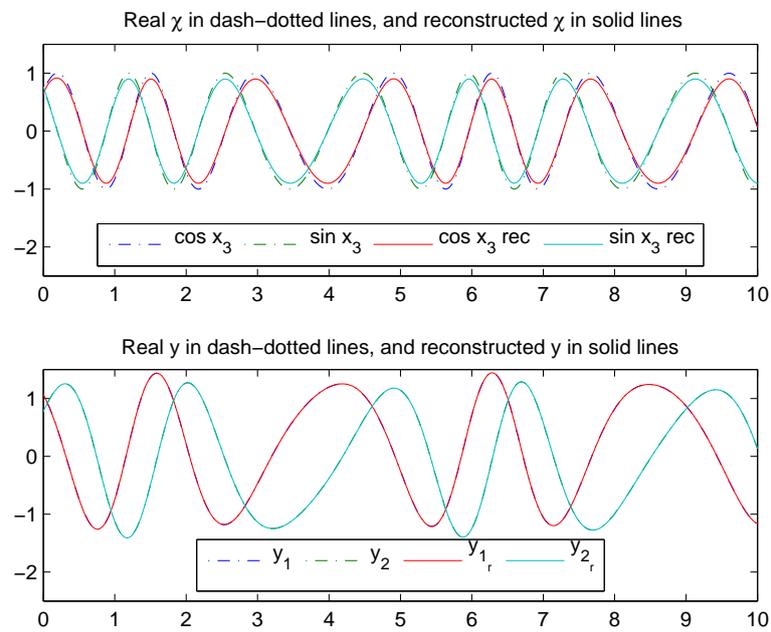
On s'intéresse ici au comportement de l'observateur dans le cas d'incertitudes de modélisation. On commence par s'intéresser aux paramètres a_i . La figure 4.9 montre une simulation réalisée dans les conditions suivantes : le paramètre a_1 utilisé dans la simulation du moteur est diminué de 10% par rapport à celui modélisé dans l'observateur. 10% est une valeur d'incertitude assez forte, et on voit les effets sur l'état reconstruit. Malgré ça, la figure 4.8 montre une reconstruction de x_3 plutôt acceptable.

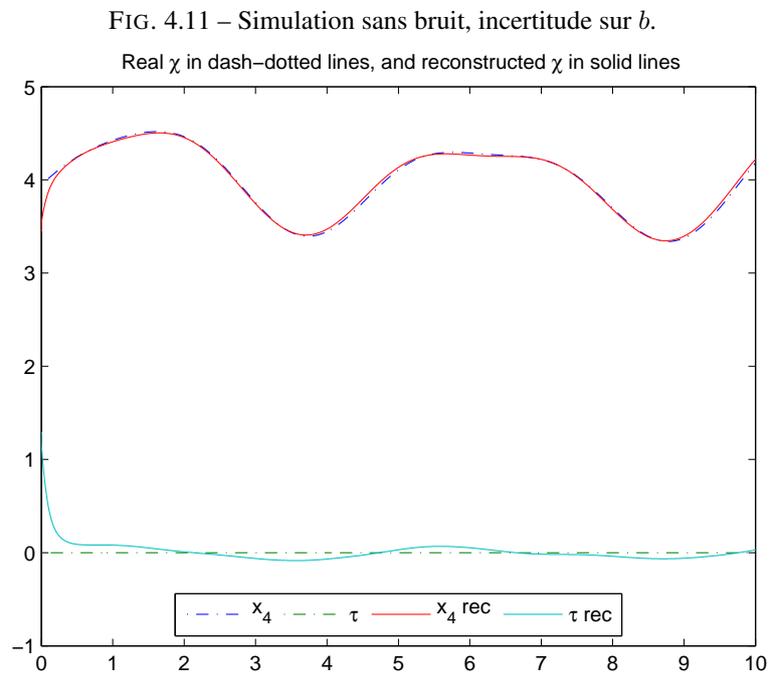
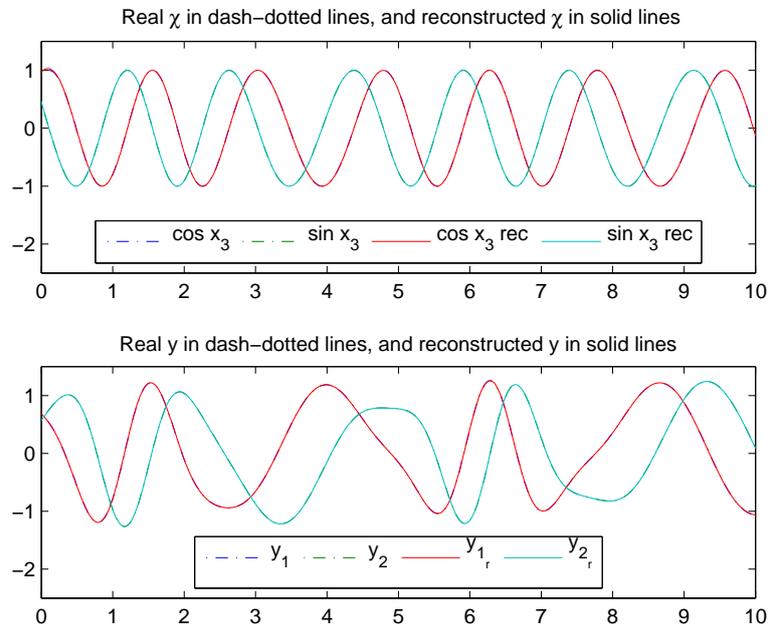
La figure 4.10 montre quant à elle une simulation réalisée avec la même incertitude sur a_1 et a_2 . On voit que l'observateur est beaucoup moins perturbé que dans la situation précédente. Les valeurs de $\cos x_3$ et $\sin x_3$ obtenues sont affectées en amplitude, mais la reconstruction de x_3 à partir de ces données est quasiment parfaite.

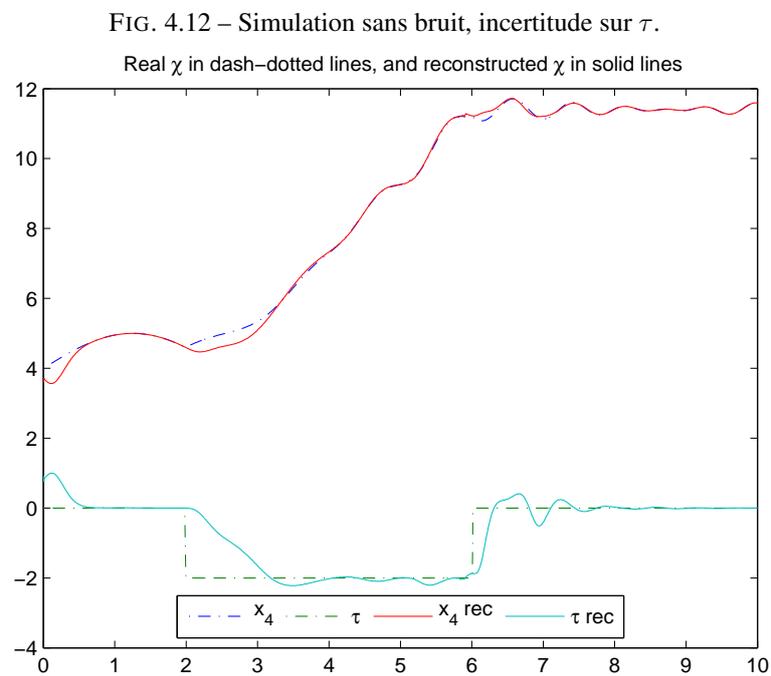
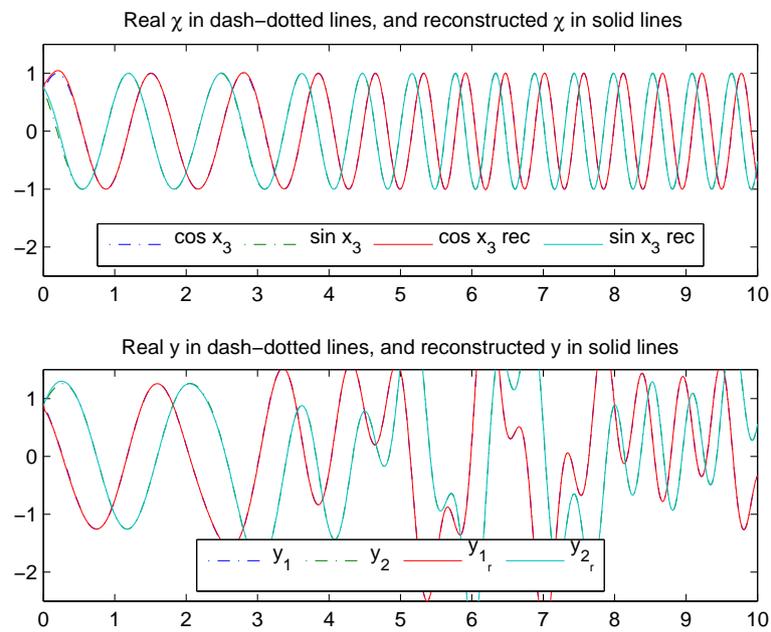
De la même façon que pour les simulations précédentes, la figure 4.11 montre le comportement de l'observateur dans le cas où le paramètre b est dégradé de 10% dans la simulation du moteur. On voit que ça n'affecte quasiment pas le fonctionnement de l'observateur.

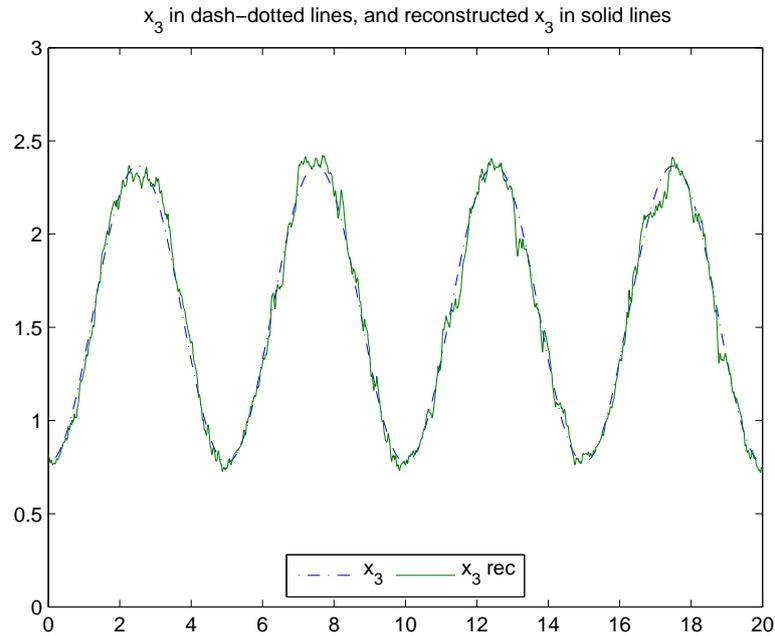
Enfin, un cas intéressant en pratique c'est celui où τ évolue dans le temps. La figure 4.12 montre une simulation réalisée avec une variation de τ . On voit que l'observateur suit la variation de ce paramètre et se stabilise assez rapidement près de la valeur réelle. Le suivi du paramètre τ est donc parfaitement assuré par l'observateur.





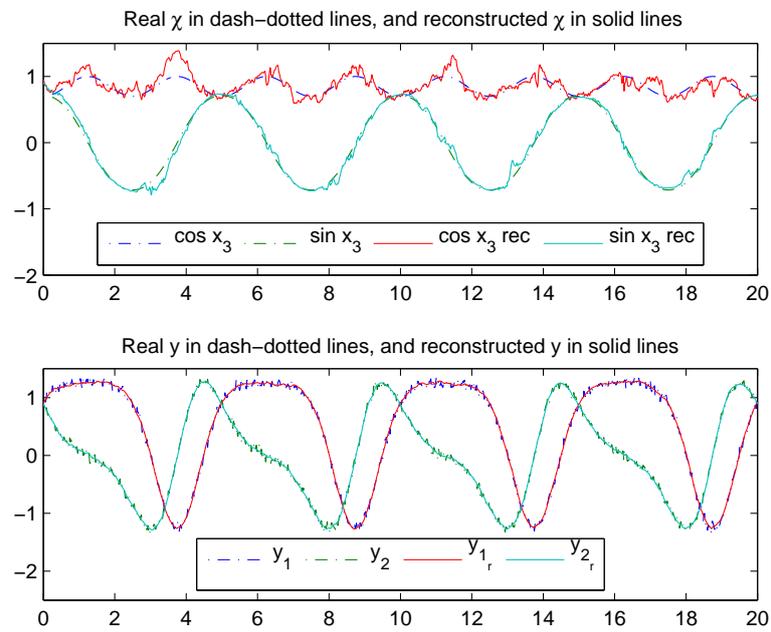
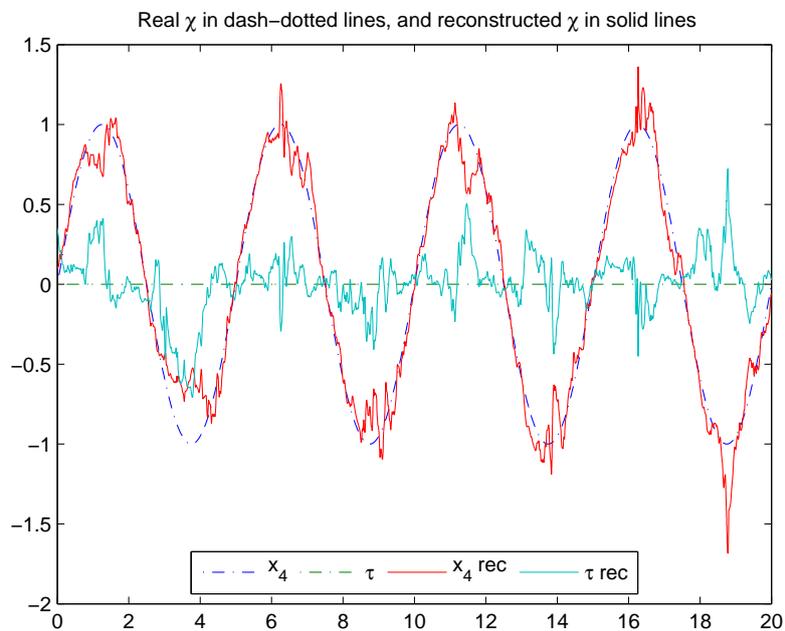


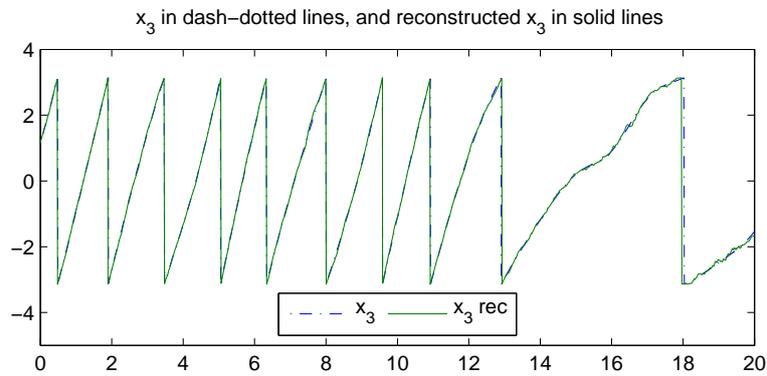


FIG. 4.13 – Reconstruction de x_3 avec un passage de x_4 par zéro.

4.6.4 Simulation avec passage de x_4 par zéro

On a vu dans le chapitre 3.2 que le cas où x_4 s'annule est singulier et rend plus difficile l'observation du système. De manière plus générale, lorsque la valeur de $a_i x_4$ est faible devant celle de $u_i - \dot{x}_i$, l'observation du système est très sensible aux bruits de mesures. Les figures 4.13 et 4.14 montrent le fonctionnement de l'observateur pour la trajectoire $x_4 = \sin(\Omega t)$. Les résultats présent illustrent le fait que l'observation du système est de moins bonne qualité, mais malgré cela notre observateur donne une reconstruction de x_3 assez juste.

FIG. 4.14 – Simulation avec bruit, passage de x_4 par zéro.

FIG. 4.15 – Reconstruction de x_3 dans un défavorable.

4.6.5 Simulation dans un contexte défavorable

Pour terminer cette série de simulations, on se propose de réaliser une simulation dans des conditions défavorable, *i.e.* on a cumulé l'ensemble des possibilité de bruit et d'incertitude vus dans les simulations précédentes. La figure 4.13 montre une simulation dans laquelle on cumule une incertitude sur a_1 , a_2 , et b . De plus, il y a un bruit de mesure de variance 0.05 et une variation de la valeur de τ . Les résultats obtenus sont tout à fait acceptables, avec une reconstruction de x_3 correcte visible sur la figure 4.14. On peut également remarquer que la reconstruction de x_3 souffre un peu lorsque x_4 s'approche de 0.

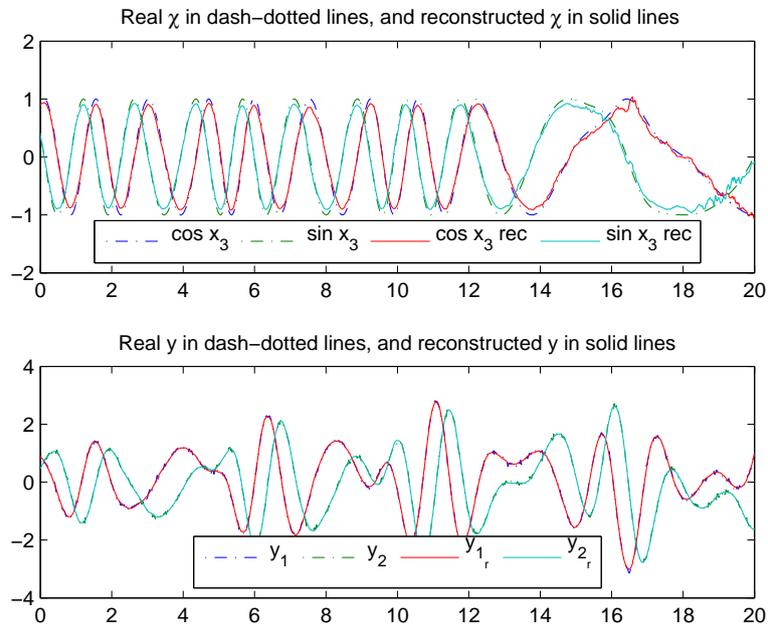
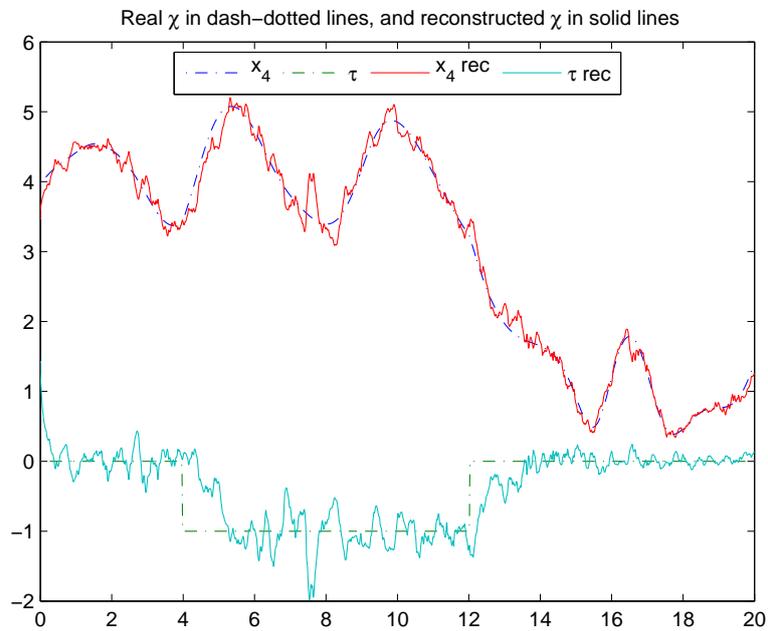


FIG. 4.16 – Simulation dans un contexte défavorable.



Chapitre 5

Conclusion

La durée du stage (12 semaines) n'a pas permis d'explorer l'ensemble des possibilités qu'offre cette technique d'observation, mais à la question de savoir s'il est possible de réaliser un observateur pour cette structure de modèle, on peut répondre oui, et même sous des conditions relativement faibles, puisque la connaissance des perturbations mécanique n'est pas nécessaire, et il suffit simplement que le moteur reste en mouvement.

À partir de ça, il y a encore beaucoup de travail et de voies à explorer avant de se prononcer sur les qualités de cet observateur, notamment :

- Quel sera le comportement de l'observateur dans le cas d'un moteur commandé, avec des signaux et des paramètres réalistes ? En effet, même si c'est difficile à quantifier précisément, on se doute bien que le rapport de grandeur entre les termes $a_i x_A(t)$ et les $u_i(t) - \dot{x}_i(t)$ va fortement influencer sur la qualité de l'observation du système. Dans notre cas, nous avons pris des grandeurs du même ordre, mais qu'en est-il réellement dans une situation réelle ?
- Toujours dans l'optique d'une implantation réaliste, on doit se poser la question de la sensibilité de notre observateur aux incertitudes de modélisation, et cela suppose disposer d'une connaissance précise des incertitudes caractéristiques à ce type de modèle, d'où la nécessité d'une étude approfondie.
En effet, si on constate qu'il est assez aisé de tenir compte d'une incertitude sur la résistance des inducteurs (phénomène classique, dû en grande partie à l'échauffement des bobinages), en augmentant la taille de l'état de l'observateur, on ne peut pas en dire de même à propos de l'inertie du rotor, des inductances d'inducteurs ou encore du flux des aimants permanents, pour lesquels la prise en compte de ces variables comme des variables d'état du système changeraient la dynamique actuellement linéaire de notre système d'ordre réduit.
- D'un autre point de vue, la prise en compte des incertitudes par augmentation de l'état du système nous coûte très cher en temps de calcul, puisque d'une part la taille de l'état de l'observateur dépend de façon affine de la taille de l'état à reconstruire, et d'autre part, l'ordre du système pour la réalisation de \mathcal{T} dépend de façon polynomiale de la taille de l'état du système. La complexité de notre observateur est donc au moins cubique en fonction de la taille de l'état à reconstruire.

Heureusement, il y a des certainement des choses à faire pour réduire la complexité de notre implantation. D'une part, l'expression des coefficients quadratiques de \mathcal{T} est relativement simple, donc il est peut être possible de trouver

des simplifications, et d'étudier par ailleurs le rôle précis du terme \mathbf{K} ajouté dans l'équation (4.4.8). D'autre part, l'expérimentation montre que l'observateur semble peu sensible à une incertitude présente sur les coefficients de \mathcal{T} quadratiques et indépendants de l'état, ce qui laisse penser que des simplifications sur ces équations puisse être envisagées. Il semble en revanche qu'une incertitude sur les termes linéaires en l'état est très critique.

– Pour finir, comment fixer nos nombreux degrés de liberté de façon “optimale” ?

À savoir, que dire de :

- le placement des valeurs propres de Λ ,
- le choix de la fonction β ,
- le choix de \mathbf{K} ,

qui chacun influe sur l'injectivité de $(\chi, \psi, t) \mapsto \mathcal{T}(\chi, \psi, t)$? Comment choisir les gains k_χ et k_ψ pour maximiser la qualité du suivi de (χ, ψ) avec une bonne immunité au bruits ?

Tout les points évoqués ci-dessus montrent qu'il y a encore beaucoup à faire pour maîtriser tous les rouages de l'observateur que l'on présente ici, même si les résultats que l'on présente nous donnent un certain optimisme pour l'avenir de ce problème.

Bibliographie

- [And05] Vincent Andrieu. *Bouclage de sortie et observateur*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005.
- [AP06] Vincent Andrieu and Laurent Praly. On the existence of a Kazantzis-Kravaris/Luenberger Observer. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Volume 45 :432–446, 2006.
- [GK01] Jean Paul Gauthier and Ivan Kupka. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Number ISBN-0-521-80593-7. Cambridge University Press, 2001.
- [Kal60] Rudolph Emil Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82(D) :35–45, 1960.
- [KK98] Nikolaos Kazantzis and Costas Kravaris. Nonlinear observer design using Lyapunov’s auxiliary theorem. *Systems and Control Letters*, 34 :241–247, 1998.
- [Lon06] Ruixing Long. An extension of the Luenberger observer to nonlinear systems : theory and approximation. To be published, 2006.
- [Lue64] David G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, pages 74–80, 1964.
- [PMI06] Laurent Praly, Lorenzo Marconi, and Alberto Isidori. A new observer for an unknown harmonic oscillator. Submitted to 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July 24–28, 2006.
- [PS01] Vladan Petrović and Aleksandar M. Stanković. Modeling of PM Synchronous Motors for Control and Estimation Tasks. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2229–2234, dec 2001.

Chapitre 6

Annexes

6.1 Terminologie

On donne dans cette section quelques notations utilisées dans ce document :

\hat{x} : Reconstruction de la variable x .

\tilde{x} : Erreur de reconstruction de la variable x .

A^* : Transconjuguée de A , *i.e.* \bar{A}^T , d'où, si ξ est un vecteur, $\xi^* \xi = |\xi|^2$.

$\Re\{A\}$: Partie réelle de A .

$\lambda_i(A)$: $i^{\text{ème}}$ valeur propre de A .

6.2 Définitions

On donne ici la définition des termes techniques utilisés dans ce document :

Définition 3 (Distinguabilité). Le système défini par $\dot{x} = f(x, t)$, $y = h(x)$ évoluant dans compact un complet \mathcal{O} est dit distinguable si $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{O}^2$, avec $x_1 \neq x_2$, alors il existe $\delta_{t_0} > 0$ tel que

$$h(X(x_1, t_0 + \delta_{t_0}, t_0)) \neq h(X(x_2, t_0 + \delta_{t_0}, t_0)).$$

Définition 4 (Fonction de classe \mathcal{K}). Une fonction $\rho : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ est dite de classe \mathcal{K} si (i) $\rho(0) = 0$, si (ii) ρ est strictement croissante et si (iii) ρ est continue.

Définition 5 (Fonction de classe \mathcal{K}_∞). Une fonction $\rho : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ est dite de classe \mathcal{K}_∞ si elle est de classe \mathcal{K} et si de plus

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \rho(s) = +\infty.$$

Définition 6 (Fonction Lipschitzienne). Une fonction $f : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}$ est dite k -Lipschitzienne si il existe $k > 0$, tel que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{O}^2.$$

Définition 7 (Matrice Hurwitz). Une matrice est dite Hurwitz si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative.

Définition 8 (Stabilité entrée-état). Le système décrit par $\dot{x} = f(x, u(t))$ avec la fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ localement Lipschitzienne est dit stable entrée-état s'il existe (i) une fonction $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ définie positive, radialement non bornée et de classe \mathcal{C}^1 , et s'il existe (ii) une fonction μ de classe \mathcal{K} telles que

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq -\mathcal{V}(x) + \mu(|u|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u.$$

Alors, toutes les solutions du système issues de (x_0, t_0) sont définies et bornées sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ si $u(t)$ est borné sur cet intervalle.